**Дистанционный конкурс
учебно-исследовательских работ и творческих проектов
«Первые шаги в науку»**

Направление: МАТЕМАТИКА ( алгебра, геометрия)

**Признаки делимости натуральных чисел**

Алексеева Дарина

МОАУ «СОШ № 70», 7 класс

Научный руководитель:

Мунасыпов наиль Амирович,

кандидат физико – математических наук, доцент

Школьный учитель:

Кутубарова Акзайда Темерхановна, математика

2020

**Оглавление:**

Введение ……………………………………………….**……**…………………….…2

Глава 1. Сведения из истории ……………………………**……**…………………...3 Глава 2. Признаки делимости …..……………………………………….**…**…… 4

2.1. Признаки делимости натуральных чисел, изучаемые в школе .......... **…**......4

2.2. Признаки делимости натуральных чисел, полученные самостоятельно………………………………………………………………**…**… 5

2.3. Признаки делимости натуральных чисел из разных источников …..**……**….7

2.4.Задачи на применение признаков делимости …………….**…**.….......……. 11

Заключение …………………………………………**……**……………………..….13

**Список литературы (источников)…………… …………………………………..**14

1. Введение

На уроках математики изучая тему «Делимость чисел», мы познакомились с признаками делимости на 2, 3, 5, 9 и 10, узнали, какие числа являются простыми и составными, научились с помощью полученных знаний определять делится ли данное натуральное число. Но оказалось, что изученные признаки недостаточны для решения олимпиадных задач, примеров на уроках математики, чтобы развивать вычислительные навыки . Мне, как ученице 6 класса, интересны задания, где требуется точный вычислительный счет. Для этого надо знать признаки делимости чисел на простые и составные числа и уметь применять их для решения различных задач. Мне стало интересно, какие еще есть признаки деления натуральных чисел и можно ли ещё самой получить новые признаки делимости? Именно поэтому для исследовательской работы мной выбрана тема «Признаки делимости натуральных чисел».

 ***Цель нашей исследовательской работы*** – найти и систематизировать признаки делимости, позволяющие решить задачи, не прибегая к громоздкимрасчетам ивычислениям.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие**задачи:**

1) Самостоятельно исследовать делимость чисел.

2) Изучить дополнительную литературу с целью ознакомления с другими признаками делимости.

3) Объединить и обобщить признаки из разных источников.

4) Сделать вывод.

***Гипотеза:*** Мы предполагаем, что если можно определить делимость чисел на 2, 3, 5, 9 и 10, то должны быть признаки, по которым можно определить делимость и на другие числа.

В результате изучения различной литературы***, наша гипотеза была подтверждена.***

 ***Предмет исследования:*** Признаки делимости.

 ***Методы исследования:***

1. Изучение литературы и электронных источников.
2. Систематизация и обобщение полученной информации.
3. Применение изученной теории при решении проблемных задач***.***

Работа имеет **практическое применение**. Данное исследование будет полезным для учащихся при самостоятельной подготовке к контрольным работам. А также будет полезно и для учеников, целью которых стали высокие места на городских олимпиадах.

**Глава 1. Сведения из истории.**

Д**елимость натуральных чисел**, простые и составные числа, взаимно простые числа, делители и кратные, разложение чисел на простые множители интересовали великих математиков еще с древних времен. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10, были известны с давних времен. Признак делимости на 2 знали древние египтяне за 2 тысячи лет до нашей эры.

Признаки делимости на 2, 3 и 5 были обстоятельно изложены итальянским математиком Леонардо Фибоначчи (1170 – 1228).

В III веке до нашей эры александрийский ученый Эратосфен открыл способ составления списка простых чисел, так как считал, что простые числа играют важную роль в изучении всех остальных чисел. Его метод составления списка простых чисел назвали решетом Эратосфена.

Вопросы делимости чисел рассматривались учениками Пифагора.

 Большой вклад в изучение признаков делимости чисел внес **Блез Паскаль, ** один из самых знаменитых людей в истории человечества. Паскаль родился 19 июня 1623 в Клермон-Ферран, в семье высокообразованного юриста. Отец Паскаля имел хорошее образование и решил самостоятельно заниматься образованием мальчика. Блез рос одарённым ребёнком и рано проявил выдающиеся математические способности. Его отец старался обучить мальчика древним языкам, настаивая, чтобы тот не отвлекался на разного рода пустяки. Как-то раз, на очередной вопрос сына о том, что такое геометрия, отец кратко ответил, что это способ чертить правильные фигуры и находить между ними пропорции. Однако тут же запретил ему всякие исследования в этой области. Но запретный плод сладок, и Блез, закрывшись в своей спальне, принялся углем выводить на полу различные фигуры и изучать их. Когда отец случайно застал его за одним из таких самостоятельных уроков, он был потрясен: не знавший даже названий фигур, мальчик доказывал их свойства. Так постепенно раскрывался гений Блеза Паскаля.

Паскаль нашел общий алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число, который опубликовал в трактате "О характере делимости чисел".

**Глава 2. Признаки делимости.**

**Делимость -** способность одного числа делиться на другое. Свойства делимости зависят от того, какие множества чисел рассматривают. Если рассматривают только целые положительные (натуральные) числа, то говорят, что одно число делится на другое (является кратным другого), если частное от деления первого числа на второе будет также целым числом.

**Признак делимости** — алгоритм, позволяющий сравнительно быстро определить, является ли число кратным заранее заданному числу.

**2.1.** **Признаки делимости натуральных чисел, изучаемые в школе.**

Представим признаки делимости в виде таблицы:

|  |
| --- |
| **Число делится** |
| На: | **Если:** | **Пример** |
| **2** | оно оканчивается чётной цифрой: 0, 2, 4, 6, 8. | 36 оканчивается чётной цифрой 6 |
| **5** | оно оканчивается цифрой 0 или 5. | 135 оканчивается цифрой 5 |
| **10** | оно оканчивается цифрой 0. | 1350 оканчивается цифрой 0 |
| **3** | сумма цифр этого числа делится на3. | 225 делится на 3, т.к. сумма цифр 2+2+5= 9, делится на3. |
| **9** | сумма цифр этого числа делится на 9. | 351 делится на 9, т.к. сумма цифр 3+5+1 = 9, делится на9.  |
| **4** | две последние цифры этого числа образуют число, делящееся на 4. | 3164; две последние цифры составляют число 64, оно делится на 4; число 3164 делится на 4. |
| **25** | оно оканчивается на 00, 25, 50 или 75. | 7325 оканчивается на25 |

**2.2. Признаки делимости натуральных чисел, полученные самостоятельно.**

Проанализировав представленные выше признаки делимости, можно сформулировать признаки делимости на 4, 6, 8, 12, 15, 20, 30, 45, 50, 90.

|  |
| --- |
| **Число делится** |
| На: | **Если:** | **Пример** |
| Признак делимости на 4 | Натуральное число делится на 4, если две его последние цифры нули, либо образуют число, делящееся на 4.  | 14676 — последние цифры 76, и число 76 делится на 4 |
| Признак делимости на 6 | Число делится на 6 тогда, если оно делится и на 2, и на 3 (то есть если оно четное и сумма его цифр делится на 3).  | 2014**8** делится на 6 (число чётное и 2+0+1+4+8=15) |
| Признак делимости на 8 | Натуральное число делится на 8, если три его последние цифры нули, или образуют число, делящееся на 8.  | 21808 делится на 8 (808:8=101) |
| Признак делимости на 12 | Натуральное число делится на 12, если оно делится на 3 и 4 одновременно.  | 15 743 400 - делится на 3 и 4, а значит и на 12. |
| Признак делимости на 15 | Натуральное число делится на 15 ,если оно делится на 3 и на 5 одновременно, т.е. оканчивается нулем или пятеркой и сумма его цифр делится на 3.  | 15 743 400 - делится на 3 и 4, а значит и на 12. |
| Признак делимости на 16 | Натуральное число делится на 16 ,если оно делится на 2 и полученное частное делится на 8.  | 4096 делится на 16, т.к. 4096: 2=2048 и 2048: 8 (три его последние цифры нули, или образуют число, делящееся на 8) |
| Признак делимости на 18 | Натуральное число делится на 18, если оно делится на 2 и 9 одновременно. | 22410 делится на 9 (число чётное и 2+2+4+1+0=9) |
| Признак делимости на 20 | Натуральное число делится на 20, если оно оканчивается цифрой 0 и его предпоследняя цифра делится на 2.  |  324567**80** делится на 20 (80:20=4) |
| Признак делимости на 30 | Натуральное число делится на 30,если оно делится на 3 и на 10 одновременно, т.е. оканчивается нулем и сумма его цифр делится на 3.  | 1 046 790 делится на 30, т.к. 1+0+4+6+7+9+0=27, кратное 3. |
| Признак делимости на 45 | Натуральное число делится на 45, если оно делится на 5 и на 9 одновременно, т.е. оканчивается цифрой 5 и сумма его цифр делится на 9.  | 1 046 790 делится на 30, т.к. 1+0+4+6+7+9+0=27, кратное 3. |
| Признак делимости на 50 | Натуральное число делится на 50,если число образованное его последними двумя цифрами делится на 50 (то есть, последние две цифры образуют 00 или 50).  | 25467**50**, 5648**00** делятся на 50 |
| Признак делимости на 90 | Натуральное число делится на 90,если оно делится на 9 и на 10 одновременно, т.е. оканчивается нулем и сумма его цифр делится на 9.  | 78 046 740 делится на 90, т.к. 7+8+4+6+7+4=36, кратное 9. |

**2.3. Признаки делимости натуральных чисел из разных источников.**

**Признаки делимости на 7.**

|  |
| --- |
| **Число делится** |
| На: | **Если:** | **Пример** |
| Признак делимости на 7 | Число делится на 7 тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7  | (например, 343 делится на 7, так как 34-(2·3)=34-6=28 делится на 7; 259 делится на 7, так как 25-(2·9)=7 делится на 7). |
| Признаки делимости на 11 | Число делится на 11 тогда, когда сумма цифр, стоящих на нечётных местах, либо равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах, либо отличается от неё на число, делящееся на 11  | (например, 14641 делится на 11, так как 1+6+1=4+4) |
| Признак делимости на 13 | Число делится на 13 если сумма числа десятков с учетверенным числом единиц делится на 13.  | *314288 делится на 13, так как 314 – 288 = 26,**975 делится на 13, так как 97 – 9 · 5 = 52, а 52 делится на 13* |
| Признак делимости на 14 | Число делится на [14](http://ru.wikipedia.org/wiki/14_%28%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE%29) тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 7., | 34692 делится на 14 |
| Признак делимости на 17 | Число делится на 17 если модуль разности числа десятков и пятикратного числа единиц делится на 17.  | *221 делится на 17 (|22-1·5|=17 делится на 17);**453 не делится на 17 (|45-3\*1|=40 не делится на 17).* |
| Признак делимости на 19 | Число делится на 19 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с удвоенным числом единиц, делится на 19.  |  *133 делится на 19 (13+3·2=19 делится на19)* |
| Признаки делимости на 23 | Признак 1: число делится на 23 тогда и только тогда, когда число сотен, сложенное с утроенным числом, образованным двумя последними цифрами, делится на 23.Признак 2: число делится на 23 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с семикратным числом единиц, делится на 23.Признак 3: число делится на 23 тогда и только тогда, когда число сотен, сложенное с семикратным числом десятков и утроенным числом единиц, делится на 23.  |  *133 делится на 19 (13+3·2=19 делится на19)* |
| Признак делимости на 27 | Число делится на 27 тогда и только тогда, когда на 27 делится сумма чисел, образующих группы по три цифры (начиная с единиц).  | *135 000 делится на 27 (000+135=135 делится на 27* |
| Признак делимости на 29 | Число делится на 29 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с утроенным числом единиц, делится на 29.  | *261 делится на 29 (26+1·3=29)* |
| Признак делимости на 31 | Число делится на 31 тогда и только тогда, когда модуль разности числа десятков и утроенного числа единиц делится на 31.  |  *155 делится на 31 (15-5·3=0 делится на 31).* |
| Признак делимости на 37 | Признак 1: число делится на 37 тогда и только тогда, когда при разбивании числа на группы по три цифры (начиная с единиц) сумма этих групп кратна 37.Признак 2: число делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится модуль утроенного числа сотен, сложенного с учетверённым числом десятков, за вычетом числа единиц, умноженного на семь.Признак 3: число делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится модуль суммы числа сотен с числом единиц, умноженного на десять, за вычетом числа десятков, умноженного на 11.  | *100 048 делится на 37, так как 100 + 48 = 148* |
| Признак делимости на 41 | Признак 1: число делится на 41 тогда и только тогда, когда модуль разности числа десятков и четырёхкратного числа единиц делится на 41.Признак 2: чтобы проверить, делится ли число на 41, его следует справа налево разбить на грани по 5 цифр в каждой. Затем в каждой грани первую справа цифру умножить на 1, вторую цифру умножить на 10, третью — на 18, четвёртую — на 16, пятую — на 37 и все полученные произведения сложить. Если результат будет делиться на 41, тогда и только тогда само число будет делиться на 41.  | *287 делится на 41 (28-7·4=0 делится на 41)* |
| Признак делимости на 59 | Число делится на 59 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с числом единиц, умноженное на 6, делится на 59.  | *118 делится на 59 (11+8·6=59 делится на 59)* |
| Признак делимости на 79 | Число делится на 79 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с числом единиц, умноженное на 8, делится на 79.  | *711 делится на 79 (71+1·8=79 делится на 79)* |
| Признак делимости на 99 | Число делится на 99 тогда и только тогда, когда на 99 делится сумма чисел, образующих группы по две цифры (начиная с единиц).  | *267 597 делится на 99, так как 97 + 75 +26 = 198* |
| Признак делимости на 101 | Число делится на 101 тогда и только тогда, когда модуль алгебраической суммы чисел, образующих нечётные группы по две цифры (начиная с единиц), взятых со знаком «+», и чётных со знаком «-» делится на 101 | *590 648 делится на 101, так как 59 – 06 + 48 = 101* |

Таким образом, все перечисленные **признаки делимости натуральных чисел можно разделить на 5 групп:**

1 группа – делимость чисел определяется по последней цифре (признаки делимости на 2, 5) или последним цифрам (признаки делимости на 4, на 8, на 20, на 25, на 50, на разрядную единицу);

2 группа – делимость чисел определяется по сумме цифр числа (признаки делимости на 3. на 9);

3 группа – делимость чисел определяется после выполнения каких-то действий над цифрами числа (признаки делимости на 7, на 11, на 13, на 17, на 19 и на 23);

4 группа – для определения делимости чисел используется разложение их на множители (признаки делимости на 6, на 12, на 14, на 15);

5 группа – делимость чисел определяется разбиением цифр числа на группы и нахождением алгебраической суммы чисел, образованных этими группами (признаки делимости на 37, на 99, на 101).

**2.4. Задачи на применение признаков делимости.**

**Задача 1** (Кенгуру-2004): Каков наибольший делитель числа 32004 + 6, отличный от этого числа?

**Решение.** Число 32004 + 6 не делится на 2, так как 6 делится на 2, а 32004 – не делится. Но 32004 + 6 делится на 3. Поэтому наименьший делитель этого числа равен 3. Чтобы получить наибольший делитель, отличный от самого числа, надо это число разделить на наименьший делитель. Поэтому наибольший делитель равен (32004 + 6) : 3 = 32003 + 2.

**Ответ:** 32003 + 2.

**Задача 3:** Доказать, что n3+3n2+5n+3 делится на 3 при любом натуральном n.

**Решение:**

Представим многочлен в виде суммы двух слагаемых:

n3+3n2+5n+3=n3+3n2+2n+3n+3=n(n2+3n+2)+3(n+1)=n(n+1)(n+2)++3(n+1), первое слагаемое есть произведение трех последовательных натуральных чисел, одно из которых обязательно делится на 3, а второе слагаемое содержит множитель 3, => оно делится на 3, а **значит и вся сумма делится на 3.**

**Задача 3** (Открытый банк заданий ЕГЭ (ФИПИ):

Приведите пример пятизначного числа кратного 12, произведение цифр которого равно 40. В ответе укажите ровно одно такое число.

**Решение.**

Разложим число 40 на простые множители. 40 = 2×2×2×5.

Таких множителей всего четыре, цифр недостаточно для пятизначного числа, но в произведение всегда можно добавить единицу, результат от этого не изменится. 40 = 2×2×2×5×1.

Таким образом, число в ответе можно составить только из этих цифр: 1,2,2,2,5.

Чтобы число было кратным 12 (то же самое, что делилось на 12 без остатка) оно должно удовлетворять признакам делимости на 3 и на 4, так как 12 = 3×4.

Проверим сумму цифр 1+2+2+2+5 = 12. Она делится на 3, поэтому наше число будет делиться на 3 при любых перестановках цифр.

А чтобы оно делилось на 4, в конце нужно поставить две цифры так, чтобы образованное ими число делилось на 4.

Очевидно, что последней цифрой должна быть 2-ка, другие - нечетные.

Проверим варианты 12, 22, 52. 12:4 = 3; 22:4 = 11:2 - не делится нацело; 52:4 = 13.

**Вывод:** число должно быть составлено так, чтобы в конце было 12 или 52, а в начале любые перестановки из оставшихся трёх цифр.

**Возможные ответы:** 12252, 21252, 22152, 22512, 25212, 52212. В ответ пишем один из них. Например, 21252.

**Задача 4** (Открытый банк заданий ЕГЭ (ФИПИ):

При­ве­ди­те при­мер трёхзнач­но­го числа, сумма цифр ко­то­ро­го равна 20, а сумма квад­ра­тов цифр де­лит­ся на 3, но не де­лит­ся на 9.

**Решение**: Раз­ло­жим число 20 на сла­га­е­мые раз­лич­ны­ми спо­со­ба­ми:

 20 = 9 + 9 + 2 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 8 + 4 = 8 + 7 + 5 = 8 + 6 + 6 = 7 + 7 + 6.

При раз­ло­же­нии спо­со­ба­ми 1−4, 7 и 8 суммы квад­ра­тов чисел не крат­ны трём. При раз­ло­же­нии пятым спо­со­бом сумма квад­ра­тов крат­на де­вя­ти. Раз­ло­же­ние ше­стым спо­со­бом удо­вле­тво­ря­ет усло­ви­ям за­да­чи. **Таким об­ра­зом, усло­вию за­да­чи удо­вле­тво­ря­ет любое число, за­пи­сан­ное циф­ра­ми 5, 7 и 8, на­при­мер, число 578.**

**Заключение.**

Для осуществления цели и задач исследовательской работы мною изучено много различной математической литературы. Я провела эксперименты, которые подтвердили доступность материала о признаках делимости, важность его изучения. В своей работе систематизировала материал, объединив в группы по схожести правил, исследовала возможности использования признаков делимости при решении практических задач, предлагаемых на ЕГЭ, и олимпиадных задач**.**

**Выводы:**

1. Работая над темой исследования, я значительно расширила свои знания по математике. Кроме известных мне признаков делимости на 2, 3, 5, 9 и 10 существуют еще признаки делимости на 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 37, 41, 59, 79, 99, 101.
2. Познакомившись с признаками делимости чисел, считаю, что полученные знания смогу использовать в своей учебной деятельности, самостоятельно применить тот или иной признак к определенной задаче, применить изученные признаки в реальной ситуации, они помогут мне подготовиться к итоговой аттестации по математике.

**Научная новизна** работы заключается в подборе материала по теме, не изучаемой в школьном курсе математики.

Данная исследовательская работа дала мне возможность развивать логическое мышление, совершенствовать навыки работы с научно-популярной литературой и совершенствовать свои умения использования компьютерных программ.

**Список литературы :**

1. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел для математических школ. — М.: МЦНМО, 2002.— 264 с.
2. Виленкин Н.Я. и др. Математика. 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2013 – 288с.
3. Выгодский И.К. Справочник по элементарной математике. – М.: 2006. -  509с.
4. Перельман Я.И. Занимательная Алгебра. –М.: Триада-Литера, 1994.-199с
5. Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Издательство "Легион"; 2020 г. - 400 с. (Серия "ЕГЭ").
6. Цекунов В. Просто о признаках делимости.
7. Энциклопедический словарь юного математика / Сост.А.П.Савин.-М.: Педагогика, 1989.- 352 с./