Управление по образованию, спорту и туризму
Несвижского райисполкома
Государственное учреждение образования «Грицкевичский учебно-педагогический комплекс детский сад – средняя школа»

Функциональное уравнение

Автор работы:

Карлович Анастасия Александровна,
10 класс
ГУО «Грицкевичский учебно-педагогический комплекс детский сад – средняя школа»

Руководитель работы:

Данилова Елена Ивановна, учитель математики и информатики, ГУО «Грицкевичский учебно-педагогический комплекс детский сад – средняя школа»

г. Несвиж, 2021

Содержание

Введение

Одно из важнейших математических умений, которым должны овладеть учащиеся средней школы, − умение решать уравнения. Корень уравнения находят в одно или более действий, многие текстовые задачи решаются алгебраическим способом, то есть уравнения одновременно сами по себе являются задачами и способами решения задач, умение решать которые необходимы всем учащимся школы.

Однажды на факультативном занятии по математике учитель предложил нам решить уравнение, которое вместо привычной нам переменной x под знаком модуля содержало еще функцию f(x). Как оказалось, это было одно из уравнений, которые предлагались на турнире юных математиков. Как я узнала позже от учителя, это было функциональное уравнение.

Данное уравнение заинтересовало меня прежде всего своей необычностью. И я решила попробовать решить не только его, но и другие уравнения из той же серии, которые предлагались на турнире. Так возникла идея написания данной исследовательской работы.

Актуальность работы заключается в том, что эта тема в школьном курсе математики не изучается в виду её сложности, а на олимпиадах такие задачи встречаются.

Тема исследования: «Функциональное уравнение».

Цель исследования: найти алгоритм решения функциональных уравнений, содержащих под знаком модуля неизвестную функцию.

Объекты исследования: функциональные уравнения.

Задачи исследования:

Определить, существует ли такая функция f, что для любого действительного значения x выполнено равенство $\boldsymbol{x = f(|x|) + |f(x)|}$.

Найти все такие функции f, что для любого действительного x выполнены равенства $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)|}$ и $\boldsymbol{x = \frac{3}{4}f(|x|) + |f(x)|}$.

Решить функциональные уравнения:

$\boldsymbol{a_0 = f(|x|) + |f(x)|}$, $\boldsymbol{a_0 = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)|}$, $\boldsymbol{a_0 = \frac{3}{4}f(|x|) + |f(x)|}$, где a_0 – константа.

Найти все значения параметра a, при которых функциональное уравнение $\boldsymbol{a_0 = af(|x|) + |f(x)|}$ не имеет решений; имеет единственное решение; имеет более одного решения.

В начале исследования я выдвинула следующую **гипотезу:** существует определенный алгоритм решения функциональных уравнений вида x = $\boldsymbol{af(|x|) +}$ $\boldsymbol{+|f(x)|}$ и $\boldsymbol{a_0 = af(|x|) + |f(x)|}$), где a_0 – константа и количество корней таких уравнений зависит от значений параметра, a и константы a_0.

Методы исследования:

изучение и анализ литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет;

практический метод;

метод аналогии;

метод анализа полученных в ходе исследования данных;

метод сравнения;

метод систематизации и обобщения данных.

Практическая значимость работы заключается в том, что применяемый здесь алгоритм решения уравнений, содержащих под знаком модуля функцию, может быть предложен как один из альтернативных вариантов решения уравнений учащимся, интересующимся математикой. Кроме того, с помощью полученных в ходе исследования формул, можно решать целый класс уравнений, аналогичных рассмотренным в данной работе.

Глава 1. Функциональное уравнение

Функциональное уравнение – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений) [1].

Функция f(x) называется решением данного функционального уравнения, если она удовлетворяет ему при всех значениях аргумента в области её определения [2].

Решить функциональное уравнение – это, значит, найти все функции, которые тождественно ему удовлетворяют [1].

Всегда четко должно быть оговорено, на каком множестве функциональное уравнение задается, т.е. какова область определения каждой неизвестной функции. Общее решение функционального уравнения может зависеть от этого множества.

Кроме области определения функций, важно знать, в каком классе функций ищется решение. Количество и поведение решений очень строго зависит от этого класса [3].

Функциональные уравнения возникают в самых различных областях математики, обычно в тех случаях, когда требуется описать все функции, обладающие заданными свойствами [1].

Термин функциональное уравнение обычно используется для уравнений, несводимых простыми способами к алгебраическим уравнениям. Эта несводимость чаще всего обусловлена тем, что аргументами неизвестной функции в уравнении являются не сами независимые переменные, а некоторые данные функции от них.

Некоторые функциональные уравнения знакомы нам со школьного курса. Это уравнения f(x) = f(-x), f(-x) = - f(x), f(x+T) = f(x), которые задают такие свойства функций, как чётность, нечётность, периодичность.

Глава 2. Решение функциональных уравнений

2.1 Решение уравнения $\boldsymbol{x = f(|x|) + |f(x)|}$

Установим существует ли такая функция f, что для любого действительного значения x выполнено равенство $\boldsymbol{x = f(|x|) + |f(x)|}$ **(1)**

Уравнение $\boldsymbol{x = f(|x|) + |f(x)|}$ **(1)** равносильно уравнению

$\boldsymbol{|f(x)| = x - f(|x|)}$ (*).

Полученное уравнение (*) равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=x-f(|x|), \\ f(x)=-x+f(|x|), \end{array}\right. \\ x - f(|x|) \geq 0. \end{cases}$$ (**). По условию равенство (1) должно выполняться для любого действительного значения x.

Рассмотрим первое уравнение полученной системы: $f(x) = x - f(|x|)$.

Если x = 1, то $f(1) = 1 - f(|1|)$, $f(1) = 1 - f(1)$. Отсюда $2f(1) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$. Из неравенства $x - f(|x|) \geq 0$ полученной системы (**) следует, что $x \geq f(|x|)$ (***). При x = 1 получили $f(|1|) = f(1) = \frac{1}{2}$. Неравенство (***) выполняется, так как $1 > \frac{1}{2}$. Если x = -1, то $f(-1) = -1 - f(|-1|)$. Так как $|-1|$=1, то имеем $f(-1) = -1 - f(1)$. Ранее получили, что $f(1) = \frac{1}{2}$, значит, $f(-1) = -1 - \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$. При x = -1 неравенство (***) не выполняется, так как $f(|-1|) = f(1) = \frac{1}{2}$, а $-1 < \frac{1}{2}$.

Проверим, будет ли число -1 решением второго уравнения полученной системы, т. е. уравнения $f(x) = -x + f(|x|)$.

При x= -1 имеем $f(-1) = -(-1) + f(|-1|) = 1 + f(1)$. Если x=1, то для данного уравнения $f(1) = -1 + f(|1|)$, $f(1) = -1 + f(1)$.

Отсюда $0 \cdot f(1) = -1$. Из свойства умножения на 0 следует, что значения $f(1)$ для данного уравнения не существует. Следовательно, число -1 не может быть решением уравнения $f(x) = -x + f(|x|)$.

Таким образом, мы доказали, что число -1 не является решением системы (**), которая равносильна уравнению (1). Тем самым мы доказали, что равенство (1) выполняется не для любого действительного значения x. Значит, не существует такой функции f, что для любого действительного значения x выполнено равенство $\boldsymbol{x = f(|x|) + |f(x)|}$ **(1).**

Ответ: не существует.

2.2 Решение уравнения $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)|}$

Найдем все функции f такие, что для любого действительного x выполнено равенство $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)|}$ **(2)**

Уравнение $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)|}$ равносильно уравнению $\boldsymbol{|f(x)| = x + \frac{1}{2}f(|x|)}$ (*). Полученное уравнение (*) равносильно системе
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=x+\frac{1}{2}f(|x|), \\ f(x)=-x-\frac{1}{2}f(|x|), \end{array}\right. \\ x + \frac{1}{2}f(|x|) \geq 0. \end{cases}$$ (**). По условию равенство (2) должно выполняться для любого действительного значения x. Из неравенства $x + \frac{1}{2}f(|x|) \geq 0$ данной системы следует, что $x \geq -\frac{1}{2}f(|x|)$ (***).

Рассмотрим уравнение $f(x) = x + \frac{1}{2}f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = 0 + \frac{1}{2}f(|0|)$, $f(0) = 0 + \frac{1}{2}f(0)$. Отсюда $\frac{1}{2}f(0) = 0$, $f(0) = 0$. При x = 0 получили $f(|0|) = f(0) = 0$. Неравенство (***) выполняется, так как 0 = $-\frac{1}{2} \cdot 0$.

2) Если x=1, то $f(1) = 1 + \frac{1}{2}f(|1|)$, $f(1) = 1 + \frac{1}{2}f(1)$. Отсюда $\frac{1}{2}f(1) = 1$, $f(1) = 2$. При x=1 получили $f(|1|) = f(1) = 2$. Неравенство (***) выполняется, так как 1 > $-\frac{1}{2} \cdot 2$. (Действительно, $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, $1 > -1$).

3) При x = − 1 неравенство (***) выполняется, так как $f(|-1|) = f(1) = 2$, а $-1 = -\frac{1}{2} \cdot 2$. Теперь найдем значение $f(-1)$.

$f(-1) = -1 + \frac{1}{2}f(|-1|)$, зн. $f(-1) = -1 + \frac{1}{2}f(1) = -1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = -1 + 1 = 0$.

4) Если x = 2, то $f(2) = 2 + \frac{1}{2}f(|2|)$, $f(2) = 2 + \frac{1}{2}f(2)$. Отсюда $\frac{1}{2}f(2) = 2$, $f(2) = 4$. При x = 2 получили $f(|2|) = f(2) = 4$. Неравенство (***) выполняется, так как 2 > $-\frac{1}{2} \cdot 4$. (Действительно, $-\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$, $2 > -2$).

5) При x= -2 неравенство (***) выполняется, так как $f(|-2|) = f(2) = 4$, а $-2 = -\frac{1}{2} \cdot 4$. Кроме того, $f(-2) = -2 + \frac{1}{2}f(|-2|)$. Следовательно, $f(-2) = -2 + \frac{1}{2}f(2) = -2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = -2 + 2 = 0$.

6) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = k + \frac{1}{2}f(|k|)$, $f(k) = k + \frac{1}{2}f(k)$. Отсюда $\frac{1}{2}f(k) = k$, $f(k) = 2k$. При x = k (где k > 0) получили $f(|k|) = f(k) = 2k$. Неравенство (***) выполняется, так как k > $-\frac{1}{2} \cdot 2k$.

($-\frac{1}{2} \cdot 2k = -k$, $k > -k$ при $k > 0$).

7) При x = − k (где k > 0) неравенство (***) выполняется, так как $f(|-k|) = f(k) = 2k$, а $-k = -\frac{1}{2} \cdot 2k$. Кроме того, $f(-k) = -k + \frac{1}{2}f(|-k|)$, следовательно, $f(-k) = -k + \frac{1}{2}f(k) = -k + \frac{1}{2} \cdot 2k = -k + k = 0$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = x + \frac{1}{2}f(|x|)$ является функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{при } x > 0, \\ 0, \text{при } x \le 0. \end{cases} \quad (****)$$

Кроме того, получили, что для данной функции для любого действительного значения x выполняется неравенство $x \ge -\frac{1}{2}f(|x|)$ (***). Значит, для полученной функции (****) будет выполняться и равенство (2).

Рассмотрим уравнение $f(x) = -x - \frac{1}{2}f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = -0 - \frac{1}{2}f(|0|)$, $f(0) = 0 - \frac{1}{2}f(0)$. Отсюда $\frac{3}{2}f(0) = 0$, $f(0) = 0$. При x = 0 получили $f(|0|) = f(0) = 0$. Неравенство (***) выполняется, так как 0 = $-\frac{1}{2} \cdot 0$.

2) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = -k - \frac{1}{2}f(|k|)$, $f(k) = -k - \frac{1}{2}f(k)$. Отсюда $\frac{3}{2}f(k) = -k$, $f(k) = -\frac{2}{3}k$. При x = k (где k > 0) получили: $f(|k|) = f(k) = -\frac{2}{3}k$. Неравенство (***) выполняется, так как k > $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}k\right)$.

(Действительно, $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}k\right) = \frac{1}{3}k$, $k > \frac{1}{3}k$ при $k > 0$).

3) Если x = − k (где k > 0), то $f(-k) = -(-k) - \frac{1}{2}f(|-k|)$,

$f(-k) = k - \frac{1}{2}f(k)$. Так как $f(k) = -\frac{2}{3}k$, то

$f(-k) = k - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}k\right) = k + \frac{1}{3}k = \frac{4}{3}k$.

Но при x = − k (где k > 0) неравенство $x \geq -\frac{1}{2}f(|x|)$ (***) не выполняется, так как $f(|-k|) = f(k) = -\frac{2}{3}k$, а $-k < -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}k\right)$.

(Действительно, $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}k\right) = \frac{1}{3}k$, −k < $\frac{1}{3}k$ при k>0).

Таким образом, решением уравнения $f(x) = -x - \frac{1}{2}f(|x|)$ является функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x, \text{ при } x \geq 0, \\ -\frac{4}{3}x, \text{при } x < 0. \end{cases}$ (*****). Но для данной функции мы установили, что при $x < 0$ не выполняется неравенство $x \geq -\frac{1}{2}f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции (*****) равенство (2) будет выполняться не для любых действительных x.

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{при } x > 0, \\ 0, \text{при } x \leq 0. \end{cases}$

2.3 Решение уравнения $\boldsymbol{x = \frac{3}{4}f(|x|) + |f(x)|}$

Найдем все функции f такие, что для любого действительного x выполнено равенство $\boldsymbol{x = \frac{3}{4}f(|x|) + |f(x)|}$ **(3)**

Уравнение $\boldsymbol{x = \frac{3}{4}f(|x|) + |f(x)|}$ равносильно уравнению $\boldsymbol{|f(x)| = x - \frac{3}{4}f(|x|)}$ (*). Полученное уравнение (*) равносильно системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=x-\frac{3}{4}f(|x|), \\ f(x)=-x+\frac{3}{4}f(|x|), \end{array}\right. \\ x - \frac{3}{4}f(|x|) \geq 0. \end{cases}$ (**). По условию равенство (3) должно выполняться для любого действительного значения x. Из неравенства $x - \frac{3}{4}f(|x|) \geq 0$ полученной системы следует, что $x \geq \frac{3}{4}f(|x|)$ (***).

Рассмотрим уравнение $f(x) = x - \frac{3}{4}f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = 0 - \frac{3}{4}f(|0|)$, $f(0) = 0 - \frac{3}{4}f(0)$.

Отсюда $\frac{7}{4}f(0) = 0$, $f(0) = 0$. При x = 0 получили $f(|0|) = f(0) = 0$. Неравенство (***) выполняется, так как $0 = \frac{3}{4} \cdot 0$.

2) Если x=1, то $f(1) = 1 - \frac{3}{4}f(|1|)$, $f(1) = 1 - \frac{3}{4}f(1)$. Отсюда $\frac{7}{4}f(1) = 1$, $f(1) = \frac{4}{7}$. При x=1 получили $f(|1|) = f(1) = \frac{4}{7}$. Неравенство (***) выполняется, так как $1 > \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}$. (Действительно, $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$, $1 > \frac{3}{7}$).

3) При x = − 1 имеем $f(-1) = -1 - \frac{3}{4}f(|-1|)$. Следовательно, $f(-1) = -1 - \frac{3}{4}f(1) = -1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = -1 - \frac{3}{7} = -\frac{10}{7}$. Но неравенство (***) не выполняется, так как $f(|-1|) = f(1) = \frac{4}{7}$, а $-1 < \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}$.

4) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = k - \frac{3}{4}f(|k|)$, $f(k) = k - \frac{3}{4}f(k)$. Отсюда $\frac{7}{4}f(k) = k$, $f(k) = \frac{4}{7}$k. При x = k (где k > 0) получили $f(|k|) = f(k) = \frac{4}{7}k$. Неравенство (***) выполняется, так как k > $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}k$.

($\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}$ k $= \frac{3}{7}k$, $k > \frac{3}{7}k$ при $k > 0$).

5) При x = − k (где k > 0) имеем $f(-k) = -k - \frac{3}{4}f(|-k|)$. Следовательно, $f(-k) = -k - \frac{3}{4}f(k) = -k - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}k = -k - \frac{3}{7}k = -\frac{10}{7}k$. Но неравенство (***) не выполняется, так как $f(|-k|) = f(k) = \frac{4}{7}k$, $-k < \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}k$ при $k > 0$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = x - \frac{3}{4}f(|x|)$ является функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{7}x, \text{ при } x \geq 0, \\ \frac{10}{7}x, \text{при } x < 0. \end{cases}$$

(****). Но для данной функции мы установили, что при $x < 0$ не выполняется неравенство $x \geq \frac{3}{4}f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции равенство (3) будет выполняться не для любых действительных x.

Рассмотрим уравнение $f(x) = -x + \frac{3}{4}f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = -0 + \frac{3}{4}f(|0|)$, $f(0) = 0 + \frac{3}{4}f(0)$. Отсюда $\frac{1}{4}f(0) = 0$, $f(0) = 0$. При x = 0 получили $f(|0|) = f(0) = 0$. Неравенство (***) выполняется, так как $0 = \frac{3}{4} \cdot 0$.

2) Если x=1, то $f(1) = -1 + \frac{3}{4}f(|1|)$, $f(1) = -1 + \frac{3}{4}f(1)$. Отсюда $\frac{1}{4}f(1) = -1$, $f(1) = -4$. При x=1 получили $f(|1|) = f(1) = -4$. Неравенство (***) выполняется, так как $1 > \frac{3}{4} \cdot (-4)$.

(Действительно, $\frac{3}{4} \cdot (-4) = -3$, $1 > -3$).

3) При x = − 1 имеем $f(-1) = -(-1) + \frac{3}{4}f(|-1|)$. Следовательно,

$f(-1) = 1 + \frac{3}{4}f(1) = 1 + \frac{3}{4}\cdot(-4) = 1 - 3 = -2$. Кроме того, неравенство (***) выполняется, так как $f(|-1|) = f(1) = -4$, а $-1 > \frac{3}{4}\cdot(-4)$. (Действительно, $\frac{3}{4}\cdot(-4) = -3$, а $-1 > -3$).

4) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = -k + \frac{3}{4}f(|k|)$, $f(k) = -k + \frac{3}{4}f(k)$. Отсюда $\frac{1}{4}f(k) = -k$, $f(k) = -4$ k . При x = k (где k > 0) получили $f(|k|) = f(k) = -4\,k$. Неравенство (***) выполняется, так как k > $\frac{3}{4}\cdot(-4k)$. (Действительно,$\frac{3}{4}\cdot(-4\text{ k}) = -3\,k$, $k > -3\,k$ при $k > 0$).

5) При x = − k (где k > 0) имеем $f(-k) = -(-k) + \frac{3}{4}f(|-k|)$. Следовательно, $f(-k) = k + \frac{3}{4}f(k) = k + \frac{3}{4}\cdot(-4k) = k - 3k = -2\,k$. Кроме того, неравенство (***) выполняется, так как $f(|-k|) = f(k) = -4\,k$,
$-k > \frac{3}{4}\cdot(-4\,k)$. (Действительно, $\frac{3}{4}\cdot(-4\,k) = -3k$, $-k > -3k$ при $k > 0$).

Таким образом, решением уравнения $f(x) = -x + \frac{3}{4}f(|x|)$ является функция $f(x) = \begin{cases} -4x, \text{ при } x \geq 0, \\ 2x, \text{при } x < 0. \end{cases}$ (*****). Кроме того, получили, что для данной функции для любого действительного значения x выполняется неравенство $x \geq \frac{3}{4}f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции (*****) будет выполняться и равенство (3).

Ответ: $f(x) = \begin{cases} -4x, \text{ при } x \geq 0, \\ 2x, \text{при } x < 0. \end{cases}$

2.4 Решение функциональных уравнений с константой $\mathbf{a_0}$

Решим функциональные уравнения (1)–(3), если в левой части вместо функции x будет стоять константа a_0 .

а) Решим уравнение $\boldsymbol{a_0 = f(|x|) + |f(x)|}$ **(4)**

Уравнение $\boldsymbol{a_0 = f(|x|) + |f(x)|}$ **(4)** равносильно уравнению

$\boldsymbol{|f(x)| = a_0 - f(|x|)}$ (*). Полученное уравнение (*) равносильно системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=a_0-f(|x|), \\ f(x)=-a_0+f(|x|), \end{array}\right. \\ a_0 - f(|x|) \geq 0. \end{cases}$ (**). По условию равенство (4) должно выполняться для любого действительного значения x. Из неравенства $a_0 - f(|x|) \geq 0$ данной системы следует, что $a_0 \geq f(|x|)$ (***).

Рассмотрим уравнение $f(x) = a_0 - f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = a_0 - f(|0|)$, $f(0) = a_0 - f(0)$. Отсюда $2f(0) = a_0$, $f(0) = \frac{a_0}{2}$. При x = 0 получили $f(|0|) = f(0) = \frac{a_0}{2}$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq \frac{a_0}{2}$. Отсюда $2a_0 \geq a_0$, $a_0 \geq 0$.

2) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = a_0 - f(|k|)$, $f(k) = a_0 - f(k)$. Отсюда $2f(k) = a_0$, $f(k) = \frac{a_0}{2}$. При x = k (где k > 0) получили $f(|k|) = f(k) = \frac{a_0}{2}$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq \frac{a_0}{2}$. Отсюда $2a_0 \geq a_0$, $a_0 \geq 0$.

3) При x = − k (где k > 0) имеем $f(|-k|) = f(k) = \frac{a_0}{2}$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq \frac{a_0}{2}$, т. е. при $a_0 \geq 0$. Кроме того, $f(-k) = a_0 - f(|-k|)$. Отсюда $f(-k) = a_0 - f(k) = a_0 - \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2}$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = a_0 - f(|x|)$ является функция $\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2}}$ (****).

Кроме того, получили, что для данной функции при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x выполняется неравенство $a_0 \geq f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции (****) при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x будет выполняться и равенство (4).

Рассмотрим уравнение $f(x) = -a_0 + f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = -a_0 + f(|0|)$, $f(0) = -a_0 + f(0)$. Отсюда $0 \cdot f(0) = -a_0$. Полученное равенство будет выполняться только при $a_0 = 0$. Тогда $f(0) = b, b \in R$. Но при $a_0 = 0$ и x = 0 неравенство (***) примет вид $0 \geq b$, т.е. получили, что $f(0) = b, b \leq 0$. (b – любое действительное неположительное число).

2) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = -a_0 + f(|k|)$, $f(k) = -a_0 + f(k)$. Отсюда $0 \cdot f(k) = -a_0$. Полученное равенство будет выполняться только при $a_0 = 0$. Тогда $f(k) = b, b \in R$. Но при $a_0 = 0$ и x = k (где k > 0) неравенство (***) примет вид $0 \geq b$, т.е. получили, что $f(k) = b, b \leq 0$. (b – любое действительное неположительное число).

3) При x = − k (где k > 0) имеем $f(|-k|) = f(k) = b, b \leq 0$. Кроме того $f(-k) = -a_0 + f(|-k|)$. Отсюда $f(-k) = -a_0 + f(k) = -a_0 + b, b \leq 0$. При $a_0 = 0$ имеем $f(-k) = b, b \leq 0$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = -a_0 + f(|x|)$ является функция $\boldsymbol{f(x) = b, b \leq 0, b \in R}$ (*****).

Кроме того, получили, что для данной функции при $a_0 = 0$ для любого действительного значения x выполняется неравенство $a_0 \geq f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции (*****) при $a_0 = 0$ для любого действительного значения x будет выполняться и равенство (4).

Ответ: $f(x) = \frac{a_0}{2}$ при $a_0 \geq 0$ и $f(x) = b,$ где $b \leq 0, b \in R$ при $a_0 = 0$.

б) Решим уравнение $\mathbf{a_0} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|) + |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|$ **(5)**

Уравнение $\boldsymbol{a_0} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|) + |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|$ **(5)** равносильно уравнению

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \boldsymbol{a_0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|)$ (*). Полученное уравнение (*) равносильно системе $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x)=a_0+\frac{1}{2}f(|x|), \\ f(x)=-a_0-\frac{1}{2}f(|x|), \end{array}\right. \\ a_0 + \frac{1}{2}f(|x|) \geq 0. \end{array}\right.$ (**). По условию равенство (5) должно выполняться для любого действительного значения x. Из неравенства $a_0 + \frac{1}{2}f(|x|) \geq 0$ данной системы следует, что $a_0 \geq -\frac{1}{2}f(|x|)$ (***).

Рассмотрим уравнение $f(x) = a_0 + \frac{1}{2}f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = a_0 + \frac{1}{2}f(|0|)$, $f(0) = a_0 + \frac{1}{2}f(0)$. Отсюда $\frac{1}{2}f(0) = a_0, f(0) = 2\mathrm{a}_0$. При x = 0 получили $f(|0|) = f(0) = 2\mathrm{a}_0$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq -\frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{a}_0$. Отсюда $2a_0 \geq a_0, a_0 \geq 0$.

2) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = a_0 + \frac{1}{2}f(|k|)$, $f(k) = a_0 + \frac{1}{2}f(k)$. Отсюда $\frac{1}{2}f(k) = a_0, f(k) = 2\mathrm{a}_0$. При x = k (где k > 0) получили $f(|k|) = f(k) = 2\mathrm{a}_0$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq -\frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{a}_0$. Отсюда $2a_0 \geq a_0, a_0 \geq 0$.

3) При x = − k (где k > 0) имеем $f(|-k|) = f(k) = 2\mathrm{a}_0$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq -\frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{a}_0$, т. е. при $a_0 \geq 0$. Кроме того, $f(-k) = a_0 + \frac{1}{2}f(|-k|)$. Отсюда $f(-k) = a_0 + \frac{1}{2}f(k) = a_0 + \frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{a}_0 = 2\mathrm{a}_0$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = a_0 + \frac{1}{2}f(|x|)$ является функция $\boldsymbol{f(x) = 2\mathrm{a}_0}$ (****).

Кроме того, получили, что для данной функции при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x выполняется неравенство $a_0 \geq -\frac{1}{2}f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции (****) при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x будет выполняться и равенство (5).

Рассмотрим уравнение $f(x) = -a_0 - \frac{1}{2}f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = -a_0 - \frac{1}{2}f(|0|)$, $f(0) = -a_0 - \frac{1}{2}f(0)$. Отсюда $\frac{3}{2} \cdot f(0) = -a_0$. Тогда $f(0) = -\frac{2}{3}a_0$. При x = 0 неравенство (***) примет вид $a_0 \geq -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{2}{3}a_0)$, т.е. получили, что $a_0 \geq \frac{1}{3}a_0$. Отсюда $a_0 \geq 0$.

2) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = -a_0 - \frac{1}{2}f(|k|)$,

$f(k) = -a_0 - \frac{1}{2}f(k)$. Отсюда $\frac{3}{2} \cdot f(k) = -a_0$. Значит, $f(k) = -\frac{2}{3}a_0$.

При x = k (где k > 0) неравенство (***) примет вид $a_0 \geq -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{2}{3}a_0)$, т.е. получили, что $a_0 \geq \frac{1}{3}a_0$. Отсюда $a_0 \geq 0$.

3) При x = − k (где k > 0) имеем $f(|-k|) = f(k) = -\frac{2}{3}a_0$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{2}{3}a_0)$, т. е. при $a_0 \geq \frac{1}{3}a_0$. Отсюда $a_0 \geq 0$. Кроме того, $f(-k) = -a_0 - \frac{1}{2}f(|-k|)$. Отсюда $f(-k) = -a_0 - \frac{1}{2}f(k) = -a_0 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}a_0\right) = -a_0 + \frac{1}{3}a_0 = -\frac{2}{3}a_0$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = -a_0 - \frac{1}{2}f(|x|)$ является функция $\boldsymbol{f(x) = -\frac{2}{3}a_0}$ (*****).

Кроме того, получили, что для данной функции при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x выполняется неравенство $a_0 \geq -\frac{1}{2}f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции (*****) при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x будет выполняться и равенство (5).

Ответ: $\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{2}\mathrm{a}_{\mathbf{0}}$ при $a_0 \geq 0$ и $\boldsymbol{f(x)} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{a_0}$ при $a_0 \geq 0$.

в) Решим уравнение $\boldsymbol{a_0} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|) + |\boldsymbol{f(x)}|$. **(6)**

Уравнение $\boldsymbol{a_0} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|) + |\boldsymbol{f(x)}|$ **(6)** равносильно уравнению

$|\boldsymbol{f(x)}| = \boldsymbol{a_0} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|)$ (*). Полученное уравнение (*) равносильно системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=a_0-\frac{3}{4}f(|x|), \\ f(x)=-a_0+\frac{3}{4}f(|x|), \end{array}\right. \\ a_0 - \frac{3}{4}f(|x|) \geq 0. \end{cases}$ (**). По условию равенство (6) должно выполняться для любого действительного значения x. Из неравенства $a_0 - \frac{3}{4}f(|x|) \geq 0$ данной системы следует, что $a_0 \geq \frac{3}{4}f(|x|)$ (***).

Рассмотрим уравнение $f(x) = a_0 - \frac{3}{4}f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = a_0 - \frac{3}{4}f(|0|)$, $f(0) = a_0 - \frac{3}{4}f(0)$. Отсюда $\frac{7}{4}f(0) = a_0, f(0) = \frac{4}{7}a_0$. При x = 0 получили $f(|0|) = f(0) = \frac{4}{7}a_0$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}a_0$. Отсюда $a_0 \geq \frac{3}{7}a_0, a_0 \geq 0$.

2) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = a_0 - \frac{3}{4}f(|k|)$, $f(k) = a_0 - \frac{3}{4}f(k)$. Отсюда $\frac{7}{4}f(k) = a_0, f(k) = \frac{4}{7}a_0$.

3) При x = − k (где k > 0) имеем $f(|-k|) = f(k) = \frac{4}{7}a_0$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}a_0$, отсюда $a_0 \geq \frac{3}{7}a_0$, т. е. $a_0 \geq 0$. Кроме того $f(-k) = a_0 - \frac{3}{4}f(|-k|)$.

Отсюда $f(-k) = a_0 - \frac{3}{4}f(k) = a_0 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}a_0 = \mathrm{a}_0 - \frac{3}{7}a_0 = \frac{4}{7}a_0$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = a_0 - \frac{3}{4}f(|x|)$ является функция $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{a_0}$ (****).

Кроме того, получили, что для данной функции при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x выполняется неравенство $a_0 \geq \frac{3}{4}f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции (****) при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x будет выполняться и равенство (6).

Рассмотрим уравнение $f(x) = -a_0 + \frac{3}{4}f(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = -a_0 + \frac{3}{4}f(|0|)$, $f(0) = -a_0 + \frac{3}{4}f(0)$. Отсюда $\frac{1}{4} \cdot f(0) = -a_0$. Тогда $f(0) = -4a_0$.

При x = 0 неравенство (***) примет вид $a_0 \geq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot (-4a_0)$, т.е. получили, что $a_0 \geq -3a_0$. Отсюда $a_0 \geq 0$.

2) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = -a_0 + \frac{3}{4} f(|k|)$, $f(k) = -a_0 + \frac{3}{4} f(k)$. Отсюда $\frac{1}{4} \cdot f(k) = -a_0$. Значит, $f(k) = -4a_0$. При x = k (где k > 0) неравенство (***) примет вид $a_0 \geq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot (-4a_0)$, т.е. получили, что $a_0 \geq -3a_0$. Отсюда $a_0 \geq 0$.

3) При x = – k (где k > 0) имеем $f(|-k|) = f(k) = -4a_0$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq \frac{3}{4} \cdot (-4a_0)$, т. е. при $a_0 \geq -3a_0$. Отсюда $a_0 \geq 0$. Кроме того, $f(-k) = -a_0 + \frac{3}{4} f(|-k|)$.

Отсюда $f(-k) = -a_0 + \frac{3}{4} f(k) = -a_0 + \frac{3}{4} \cdot (-4a_0) = -a_0 - 3a_0 = -4a_0$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = -a_0 + \frac{3}{4} f(|x|)$ является функция $\boldsymbol{f(x) = -4a_0}$ (*****).

Кроме того, получили, что для данной функции при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x выполняется неравенство $a_0 \geq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} f(|x|)$ (***). Следовательно, для полученной функции (*****) при $a_0 \geq 0$ для любого действительного значения x будет выполняться и равенство (6).

Ответ: $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{7} a_0}$ при $a_0 \geq 0$ и $\boldsymbol{f(x) = -4a_0}$ при $a_0 \geq 0$.

2.5 Решение функционального уравнения с параметром *a*

Найдем все значения параметра a, при которых функциональное уравнение $\boldsymbol{a_0 = af(|x|) + |f(x)|}$ **(7)**

а) не имеет решений; б) имеет единственное решение; в) имеет более одного решения.

Под решением функционального уравнения (7) подразумевается наличие такой функции f, что равенство (7 будет верно для любого действительного значения x.

Уравнение $\boldsymbol{a_0 = af(|x|) + |f(x)|}$ **(7)** равносильно уравнению

$\boldsymbol{|f(x)| = a_0 - af(|x|)}$ (*).

Полученное уравнение (*) равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = a_0 - a\, f(|x|), \\ f(x) = -a_0 + a\, f(|x|), \end{array} \right. \\ a_0 - af(|x|) \geq 0. \end{cases} \quad (**)$$

По условию равенство (7) должно выполняться для любого действительного значения x. Из неравенства $a_0 - af(|x|) \geq 0$ данной системы следует, что $a_0 \geq af(|x|)$ (***).

Рассмотрим уравнение $f(x) = a_0 - af(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = a_0 - af(|0|)$, $f(0) = a_0 - af(0)$.

Отсюда $f(0) + af(0) = a_0$, $f(0) \cdot (1 + a) = a_0$. Тогда $f(0) = \frac{a_0}{1+a}$.

При x = 0 получили $f(|0|) = f(0) = \frac{a_0}{1+a}$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq a \cdot \frac{a_0}{1+a}$. Отсюда $a_0 - \frac{a \cdot a_0}{1+a} \geq 0$, $\frac{a_0 + a \cdot a_0 - a \cdot a_0}{1+a} \geq 0$, т.е.

$\frac{a_0}{1+a} \geq 0$. Полученное неравенство будет выполняться, в двух случаях:

1. Если $a_0 \geq 0$ и $1+a > 0$, т.е. при $a_0 \geq 0$ и $a > -1$
2. Если $a_0 \leq 0$ и $1+a < 0$, т.е. при $a_0 \leq 0$ и $a < -1$

2) Если x = k (где k > 0), то $f(k) = a_0 - af(|k|)$, $f(k) = a_0 - af(k)$. Отсюда $f(k) + af(k) = a_0$, $(1+a) \cdot f(k) = a_0$. Тогда $f(k) = \frac{a_0}{1+a}$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq a \cdot \frac{a_0}{1+a}$. Отсюда $\frac{a_0}{1+a} \geq 0$. Как и в предыдущем пункте имеем, что полученное неравенство будет выполняться, в двух случаях:

1. Если $a_0 \geq 0$ и $1+a > 0$, т.е. при $a_0 \geq 0$ и $a > -1$
2. Если $a_0 \leq 0$ и $1+a < 0$, т.е. при $a_0 \leq 0$ и $a < -1$

3) При x = $-$ k (где k > 0) имеем $f(|-k|) = f(k) = \frac{a_0}{1+a}$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq a \cdot \frac{a_0}{1+a}$. Отсюда $\frac{a_0}{1+a} \geq 0$. Как и в предыдущих двух пунктах имеем, что полученное неравенство будет выполняться, в двух случаях:

1. Если $a_0 \geq 0$ и $1+a > 0$, т.е. при $a_0 \geq 0$ и $a > -1$
2. Если $a_0 \leq 0$ и $1+a < 0$, т.е. при $a_0 \leq 0$ и $a < -1$

Кроме того, $f(-k) = a_0 - af(|-k|)$.

Отсюда $f(-k) = a_0 - af(k) = a_0 - a \cdot \frac{a_0}{1+a} = \frac{a_0 + a \cdot a_0 - a \cdot a_0}{1+a} = \frac{a_0}{1+a}$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = a_0 - af(|x|)$ является функция $\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{1+a}}$ (****).

Кроме того, эта функция будет решением системы (**), а следовательно, и решением уравнения (7) при $a_0 \geq 0$ и $a > -1$ или при $a_0 \leq 0$ и $a < -1$.

Рассмотрим уравнение $f(x) = -a_0 + af(|x|)$.

1) Если x = 0, то $f(0) = -a_0 + a \cdot f(|0|)$, $f(0) - a \cdot f(0) = -a_0$. Отсюда $(1-a) \cdot f(0) = -a_0$. Тогда $f(0) = \frac{-a_0}{1-a}$, т.е $f(0) = \frac{a_0}{a-1}$. При x = 0 неравенство (***) примет вид $a_0 \geq a \cdot \frac{a_0}{a-1}$. Тогда имеем $a_0 - \frac{a \cdot a_0}{a-1} \geq 0$ т.е. получили, что $\frac{a_0 \cdot a - a_0 - a \cdot a_0}{a-1} \geq 0$. Отсюда $\frac{-a_0}{a-1} \geq 0$, т.е. $\frac{a_0}{1-a} \geq 0$.

2) Если x = k (где $k > 0$), то $f(k) = -a_0 + af(|k|)$,

$f(k) = -a_0 + af(k)$. Отсюда $(1-a) \cdot f(k) = -a_0$. Значит, $f(k) = \frac{-a_0}{1-a}$, т.е. $f(k) = \frac{a_0}{a-1}$. При x = k (где $k > 0$) неравенство (***) примет вид $a_0 \geq a \cdot \frac{a_0}{a-1}$, т.е. получили, что (как и в предыдущем пункте) $\frac{a_0}{1-a} \geq 0$.

3) При x = $-$ k (где k > 0) имеем $f(|-k|) = f(k) = \frac{a_0}{a-1}$. Неравенство (***) будет выполняться при $a_0 \geq a \cdot \frac{a_0}{a-1}$, т. е. $\frac{a_0}{1-a} \geq 0$ (как и в предыдущих двух пунктах). Кроме того, $f(-k) = -a_0 + af(|-k|)$. Отсюда

$f(-k) = -a_0 + af(k) = -a_0 + a \cdot \frac{a_0}{a-1} = \frac{-a_0 \cdot a + a_0 + a \cdot a_0}{a-1} = \frac{a_0}{a-1}$.

Таким образом, решением уравнения $f(x) = -a_0 + af(|x|)$ является функция $\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{a-1}}$ (*****).

Полученная функция будет решением системы (**), а следовательно, и решением уравнения (7) при выполнении условия $\frac{a_0}{1-a} \geq 0$. Данное условие будет выполняться, в двух случаях:

1. Если $a_0 \geq 0$ и $1-a > 0$, т.е. при $a_0 \geq 0$ и $a < 1$
2. Если $a_0 \leq 0$ и $1-a < 0$, т.е. при $a_0 \leq 0$ и $a > 1$

Таким образом, мы получили, что при

1) $a_0 \geq 0$ и $a > -1$ решением уравнения (7) является $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{1+a}}$
2) $a_0 \geq 0$ и $a < 1$ решением уравнения (7) является $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{a-1}}$
3) $a_0 \leq 0$ и $a < -1$ решением уравнения (7) является $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{1+a}}$
4) $a_0 \leq 0$ и $a > 1$ решением уравнения (7) является $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{a-1}}$

Проанализировав все полученные случаи, можно сделать вывод, что уравнение (7) будет иметь:

- при $a_0 > 0$ и $-1 < a < 1$ два решения: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{1+a}}$ и $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{a-1}}$
- при $a_0 = 0$ и $-1 < a < 1$ одно решение: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{1+a}} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{a-1}} = 0$
- при $a_0 \geq 0$ и $a > -1$ одно решение: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{1+a}}$
- при $a_0 \geq 0$ и $a < 1$ одно решение: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{a-1}}$
- при $a_0 \leq 0$ и $a < -1$ одно решение: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{1+a}}$
- при $a_0 \leq 0$ и $a > 1$ одно решение: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{a-1}}$
- при $a_0 \leq 0$ и $-1 \leq a \leq 1$ не имеет решений

Ответ: а) не имеет решения при $a_0 \leq 0$ и $-1 \leq a \leq 1$;
б) существует единственное решение при $a_0 = 0$ и $-1 < a < 1$; при $a_0 \geq 0$ и $a > -1$; при $a_0 \geq 0$ и $a < 1$; при $a_0 \leq 0$ и $a < -1$; при $a_0 \leq 0$ и $a > 1$;
в) существует более одного решения при $a_0 > 0$ и $-1 < a < 1$.

Заключение

Целью данной работы было найти алгоритм решения функциональных уравнений, содержащих под знаком модуля неизвестную функцию. В результате проведенных исследований я пришла к выводу, что такой алгоритм существует. Суть его состоит в следующем: 1) из данного уравнения выражаем модуль неизвестной функции; 2) используя определение модуля заменяем полученное уравнение системой, состоящей из совокупности двух уравнений и одного неравенства (модуль может быть только неотрицательным); 3) для каждого из полученных уравнений последовательно находим значения функции при x = 0, x = k (k > 0) и x = -k; 4) проверяем для полученных значений функций выполнение неравенства системы; 5) если неравенство выполняется, то записываем соответствующую функцию, которая будет являться решением исходного уравнения.

Хотя функциональными уравнениями ученые-математики занимаются с очень давних пор, этому курсу так и не нашлось достойного места в школьных математических программах. А жаль. Ведь решение отдельных функциональных уравнений требует достаточно глубокого понимания предмета и прививает любовь к самостоятельной творческой работе.

Вопросы, рассмотренные в работе, не только расширяют кругозор, но и несут обучающую функцию, так как на олимпиадах такие задачи встречаются, что только подчеркивает значимость выбранной темы.

Список использованных источников

1. Функциональные уравнения. Решения. – URL:http://olympiads.mccme.ru/lktg/2006/3/3-3ru.pdf (дата обращения: 05.09.2020).

2. Захарова, В.А. Функциональные уравнения / В.А. Захарова// Сайт: Открытый урок. Первое сентября. – URL:http://festival.1september.ru/articles/211057/ (дата обращения: 05.09.2020).

3. Функциональные уравнения. – Сайт: Математика, которая мне нравится. – URL:http://hijos.ru/olimpiadnikam/2-funkcionalnye-uravneniya/(дата обращения: 05.09.2020).