Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Пичаевская средняя общеобразовательная школа»

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОЕКТ
на тему: «Многообразие многогранников»

(математика)

ученицы 11 «А класса Онегиной Веры

Руководитель проекта: учитель математики
Старчикова Ольга Владимировна

с. Пичаево

2022г

Оглавление

Введение

Человек в своей деятельности постоянно сталкивается с необходимостью изучать форму, размеры, взаимное расположение пространственных фигур. Подобные задачи решают и физики, исследующие структуру атомов и молекул, и астрономы, имеющие дело с самыми большими масштабами. Так устроен окружающий нас мир, что ни один человек в своей жизни не обойдется без пространственного представления предметов.

Раздел геометрии, изучающий фигуры в пространстве, называется стереометрией (от греч. «стереос» — обьѐмный, «метрео» — измеряю). Говоря о стереометрии, невозможно не затронуть такие красивые тела, как " Многогранники". Они имеют не только значение при геометрических исследованиях по геометрии, но и для практических приложений в других разделах математики. Формы многогранников находят широкое применение и в конструировании сложных и красивых многогранных поверхностей, которые используются в реальных архитектурных проектах. Можно заметить, что многогранники встречаются нам и окружают нас повсюду. Теория многогранников является современным разделом математики. Безусловно, недостаточно узнавать и видеть многогранники в окружающем мире. Интересно уточнить их классификацию, разновидность, связь с миром людей. Этим и обусловлен выбор темы моего проекта «Многообразие многогранников».

Проведя опрос учащихся 10-11 классов нашей школы, я выяснила, что многие мои сверстники испытывают затруднения при изучении предмета геометрии. Многим из них кажется, что геометрия совершенно не связана с нашей жизнью, что это очень трудная и совсем непонятная наука. Они знают ограниченное количество видов многогранников, плохо могут представить себе некоторые простейшие многогранные поверхности и их свойства. Кроме того, они даже не подозревают, что во многих профессиях, к которым они стремятся, в современном мире очень широко применяются различные виды многогранников. Результаты опроса показали, что тема моего исследования **актуальна** для изучения.

На основании вышесказанного я поставила перед собой следующую **цель**: выяснить как велико многообразие многогранников и как широко их применение в окружающем мире.

В соответствии с целью были определены следующие **задачи**:

- изучить соответствующую литературу с целью получения информации о характерных признаках многогранников, их происхождении и классификации;
- выяснить области применения геометрической фигура «многогранник»;
- изготовить модели многогранников разными способами;
- создать макет детской игровой площадки.

Объект исследования: многогранники

Предмет исследования: геометрические тела в окружающем мире.

Методы исследования: теоретический (изучение литературы и материалов сети Interne), эмпирический (опрос, анализ полученных данных, моделирование, фотографирование)

Практическая значимость проекта заключается в том, что информация собранная мной может быть с успехом использованы на уроках математики и во внеурочной деятельности. Кроме того, после школы я хочу стать архитектором, и более глубокое изучение данной темы поможет мне в будущем.

Срок работы над проектом: 1 год

Глава 1. Теоретическая часть

1.1.История происхождения и понятие многогранников

Многогранником называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются гранями, линии пересечения граней называются ребрами.

Многогранники могут иметь разнообразное и очень сложное строение. Различные постройки, например строящиеся дома из кирпичей и бетонных блоков, представляют собой примеры многогранников. Другие примеры можно найти среди мебели, например стол. В химии форма молекул углеводорода представляет собой тетраэдр, правильный двадцатигранник, куб. В физике примером многогранников служат кристаллы.[4]

С древнейших времен представления о красоте связывали с симметрией. Наверное, этим объясняется интерес человека к многогранникам - удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание выдающихся мыслителей, которых поражала красота, совершенство, гармония этих фигур.

Первые упоминания о многогранниках известны еще за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них – пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233 м и высота которой достигает 146,5 м. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса – немой трактат по геометрии.

История правильных многогранников уходит в глубокую древность. Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к философской геометрии. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства. [5]

Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора. Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалось способность защищать человека от злых духов.

Пифагорейцы полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды. Существование пяти правильных многогранников они относили к строению материи и Вселенной. Согласно этому мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных тел:

Вселенная - додекаэдр
Земля - куб
Огонь - тетраэдр
Вода - икосаэдр
Воздух - октаэдр

Позже учение пифагорейцев о правильных многогранниках изложил в своих трудах другой древнегреческий ученый, философ - идеалист Платон. С тех пор правильные многогранники стали называться Платоновыми телами.

Теория многогранников является современным разделом математики. Она тесно связана с топологией, теорией графов, имеет большое значение как для теоретических исследований по геометрии, так и для практических приложений в других разделах математики, например, в алгебре, теории чисел, прикладной математики - линейном программировании, теории оптимального управления. [6]

1.2.Виды многогранников

1.2.1 Выпуклые и невыпуклые (вогнутые) многогранники

Выпуклым многогранником называется многогранник, любые две точки которого соединимы в нем отрезком. Невыпуклый многогранник расположен по разные стороны от плоскости одной из его граней (рис.1).

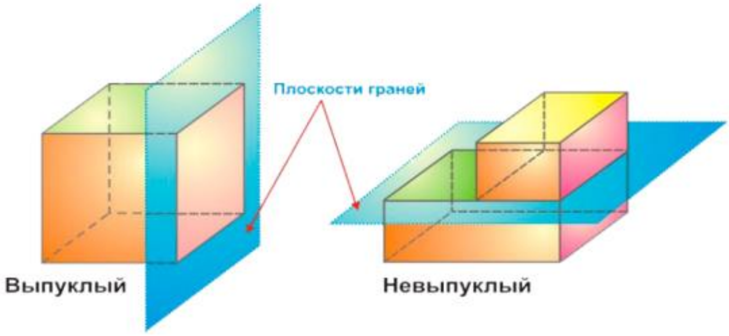


Рис.1. Выпуклый и невыпуклый многогранник

Выпуклые многогранники обладают многими замечательными свойствами. Одно из них раскрывает Теорема Эйлера, которой ученый без преувеличения «проверил алгеброй гармонию»: ***Вершины + Грани - Рёбра = 2.***

Теорема Эйлера о соотношении между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, доказательство которой Эйлер опубликовал в 1758 г. в «Записках Петербургской академии наук», окончательно навела математический порядок в многообразном мире многогранников. [1]

1.2.2 Правильные многогранники

Многогранник называется правильным, если, во-первых, он выпуклый, во-вторых, все его грани - равные друг другу правильные многоугольники, в-третьих, в каждой его вершине сходятся одинаковое число граней, и, в-четвертых, все его двугранные углы равны.

Существует пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями (рис.2).

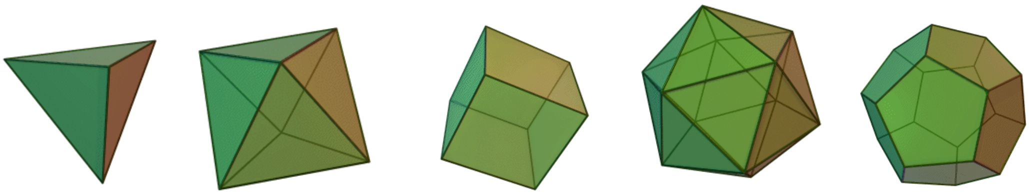


Рис. 2 Правильные многогранники

Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет; этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются "Начала" Евклида (древнегреческий математик, автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике). Почему правильные многогранники получили такие имена? Это связано с числом их граней. Тетраэдр имеет 4 грани, в переводе с греческого "тетра" - четыре, "эдрон" - грань. Гексаэдр (куб) имеет 6 граней, "гекса" - шесть; октаэдр - восьмигранник, "окто" - восемь; додекаэдр - двенадцатигранник, "додека" - двенадцать; икосаэдр имеет 20 граней, "икоси" - двадцать.

1) Правильный тетраэдр (составлен из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 1800;

2) Куб - параллелепипед, все грани которого – квадраты. Куб составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трех квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 2700.

3) Правильный октаэдр или просто октаэдр–многогранник, у которого восемь правильных треугольных граней и в каждой вершине сходятся по четыре грани. Октаэдр составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 2400. Его можно построить, сложив основаниями две пирамиды, в основании которых квадраты, а боковые грани - правильные треугольники. Ребра октаэдра можно получить, соединяя центры соседних граней куба, если же соединить центры соседних граней правильного октаэдра, то получим ребра куба. Говорят, что куб и октаэдр двойственны друг другу.

4) Икосаэдр - составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 3000.

5) Додекаэдр - многогранник, составленный из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 3240

При этом не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n-угольники при $n \geq 6$. [1]

1.2.3 Полуправильные многогранники

Многогранники Архимеда - 13 полуправильных многогранников. Древнегреческому ученому Архимеду принадлежит открытие 13 многогранников - "архимедовых тел". Они так же именуются полуправильными многогранниками.

Каждое из них ограничено неодноименными правильными многоугольниками. Кроме того, в каждой вершине сходится одно и тоже число одинаковых граней.

В одинаковом порядке каждое из этих тел может быть вписано в сферу.

Почему все архимедовы тела часто называют полуправильными многогранниками?

Каждое из 13-ти Архимедовых тел является полуправильным многогранником по своим математическим свойствам.

При этом надо помнить, что далеко не все полуправильные многогранники можно назвать архимедовыми, так как в группу полуправильных многогранников входит гораздо больше геометрических тел, а количество архимедовых многогранников очень мало - всего тринадцать: усечённый тетраэдр (рис.3 (а)), усечённый куб (гексаэдр) (рис.3 (б)), усечённый октаэдр (рис.3 (в)), усечённый додекаэдр (рис. 3(г)), усечённый икосаэдр (рис. 3(д)), кубо-октаэдр, ромбо-кубо-октаэдр, ромбо-усечённый кубо-октаэдр, плосконосый куб (другое название курносый куб), икосо-додекаэдр, усечённый икосо-додекаэдр, ромбо-усечённый икосо-додекаэдр, плосконосый додекаэдр (другое название курносый додекаэдр). [7]

Рис. 3 Архимедовы тела

1.2.4. Выпуклые призмы и антипризмы

Бесконечные семейства призм и антипризм, вообще говоря, можно включить в множество архимедовых тел, но исторически по соображениям симметрии их выделяют в отдельные группы. Так же, как и архимедовы тела, выпуклые призмы (рис. 4(а)) и антипризмы (рис. 4(б)) - это выпуклые однородные многогранники, имеющие гранями несколько различных выпуклых многоугольников.


а)


б)

Рис. 4. Призмы и антипризмы

Призмой называется тело, состоящее из двух равных параллельных многоугольников (оснований) и параллелограммов (боковых сторон), построенных на соответствующих ребрах оснований. Если боковые стороны перпендикулярны основаниям, призма называется прямой.

Если взять за основание правильный многоугольник и построить на нем прямую призму, то боковые стороны будут одинаковыми прямоугольниками. Однако, можно так подобрать высоту призмы, что эти прямоугольники превратятся в квадраты, и мы получим правильную призму. Основания правильной призмы - правильные многоугольники, боковые стороны - квадраты. В каждой вершине призмы встречаются три грани - основание и два боковых квадрата.

Антипризма получается, если повернуть одно основание относительно другого и поочередно, зигзагом, соединить вершины. Если взять за основания правильные многоугольники и подобрать расстояние между ними так, чтобы боковые стороны стали правильными треугольниками, мы получим правильную антипризму. В каждой вершине антипризмы встречаются четыре грани - основание и три боковых треугольника.

Два многогранника относятся одновременно к семейству призм и антипризм и к семейству платоновых тел. Это куб, который можно рассматривать как призму с квадратным основанием, и октаэдр, который является антипризмой с треугольным основанием.

Первым математиком, начавшим изучение призм и антипризм, был Кеплер. Он же заметил, что призмы и антипризмы относятся к архимедовым телам.

Представители семейства: тригональная призма, тригональная антипризма (октаэдр), тетрагональная призма (куб), тетрагональная антипризма, пентагональная призма, пентагональная антипризма, гексагональная призма, гексагональная антипризма, гептагональная призма, гептагональная антипризма, октагональная призма, октагональная антипризма, эннеагональная призма, эннеагональная антипризма, декагональная призма, декагональная антипризма. [10]

1.2.5 Правильные звездчатые многогранники

Среди невыпуклых однородных многогранников существуют аналоги платоновых тел - четыре правильных невыпуклых однородных многогранника или тела Кеплера-Пуансо (рис. 5).

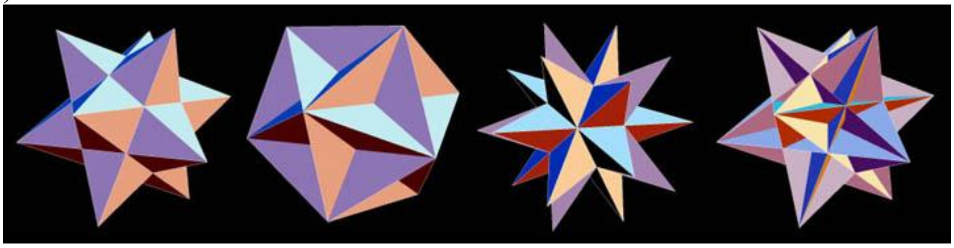


Рис. 5. Тела Кеплера-Пуансо.

Как следует из их названия, тела Кеплера-Пуансо - это невыпуклые однородные многогранники, все грани которых - одинаковые правильные многоугольники, и все многогранные углы которых равны. Грани при этом могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми.

Гранями малого звездчатого додекаэдра и большого звездчатого додекаэдра являются правильные пентаграммы, которые соединяются в каждой вершине по пять в первом и по три во втором многограннике. Эти тела были впервые описаны Иоганном Кеплером.

Грани большого додекаэдра - правильные пятиугольники. Его вершины в точности совпадают с вершинами икосаэдра, но грани пересекаются.

Последний прдставитель этого семейства - большой икосаэдр. Его вершины также совпадают с вершинами икосаэдра, но грани - пересекающиеся треугольники. Так же, как и предыдущий многогранник, большой икосаэдр впервые был описан Луи Пуансо.

Платоновы тела и тела Кеплера-Пуансо вместе составляют семейство из девяти правильных однородных многогранников. Коши доказал, что этот список полон, то есть других правильных однородных многогранников не существует.

Представители семейства: малый звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр, большой звездчатый додекаэдр, большой икосаэдр. [8]

1.2.6 Полуправильные звездчатые многогранники

Однородным называется многогранник, все грани которого - правильные многоугольники (возможно, невыпуклые), а все вершины одинаковы. В список однородных многогранников, таким образом, попадают 5 платоновых тел, 13 архимедовых тел, 4 тела Кеплера-Пуансо и, кроме того, бесконечные семейства выпуклых и невыпуклых призм и антипризм. Существуют ли другие однородные многогранники? Если существуют, то сколько? Ответ на этот вопрос известен - существуют еще 53 полуправильных невыпуклых однородных многогранника.

Как следует из названия, в это семейство входят невыпуклые аналоги архимедовых тел, то есть невыпуклые многогранники, грани которых - несколько различных правильных многоугольников (возможно, невыпуклых).

37 представителей этого семейства обнаружил Бадуро, исследовавший платоновы и архимедовы тела с целью найти правильные многоугольники или звезды среди сечений этих тел. При этом плоскости таких сечений могут пересекаться. Дело в том, что если из исходного тела удалить некоторые симметрично расположенные части, отделяемые этими плоскостями, то может получиться новый однородный многогранник. Такой процесс удаления "лишних" частей можно назвать огранкой многогранника.

Если с этой позиции рассмотреть тела Кеплера-Пуансо, то обнаруживается, что малый звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр и большой икосаэдр могут быть получены огранкой икосаэдра, а большой звездчатый додекаэдр - огранкой додекаэдра.

Помимо Бадуро, поисками невыпуклых однородных многогранников занимались и другие исследователи. В публикации от 1878 года Гесс указал два новых однородных многогранника (его работа предшествовала публикации Бадуро). Питч (1881 год) независимо нашел 18 однородных многогранников, причем некоторые из них не содержались в списке Бадуро. В 1930-1932 годах Коксетер и Миллер открыли 12 новых однородных многогранников, но не опубликовали свой результат, так как надеялись получить строгое доказательство того, что других однородных многогранников не существует. Независимо от них М. Лонге-Хиггинс и Г. Лонге-Хиггинс в 1942-1944 годах нашли 11 из 12 этих многогранников.

В 1952 году обе группы исследователей смогли ознакомиться с параллельно ведущимися работами. Тем временем в 1947 году Лесавр и Мерсье еще раз "переоткрыли" 5 из этих 12 тел. В статье "Однородные многогранники", вышедшей в 1954 году, Коксетер, Миллер и М. Лонге-Хиггинс перечислили все 75 известных на тот момент однородных многогранников. Как отмечали авторы статьи, они предполагали, что " приведенное перечисление полное, хотя строгое доказательство этого еще только требуется получить".

Доказательство полноты этого списка было получено только в 1975 году Скиллингом. Использовался компьютерный перебор всех возможных треугольников Шварца - сферических треугольников, сеть которых покрывает сферу конечное число раз. В результате Скиллинг "переоткрыл" все 75 ранее известных однородных многогранников и доказал, что других однородных многогрнников не существует.

Представители семейства:

1) тетраэдральная группа симметрии: тетрагемигексаэдр, октагемиоктаэдр, малый кубокубоктаэдр, большой кубокубоктаэдр, кубогемиоктаэдр, кубооктоусеченный кубоктаэдр, квазиромбокубоктаэдр, малый ромбогексаэдр, квазиусеченный гексаэдр, квазиусеченный кубоктаэдр, большой ромбогексаэдр;

2) икосаэдральная группа симметрии: малый битригональный икосододекаэдр, малый икосоикосододекаэдр, малый додекоикосододекаэдр, додекододекаэдр, малый ромбододекаэдр, усеченный большой додекаэдр, ромбододекододекаэдр, битригональный додекаэдр, большой битригональный додекоикосододекаэдр, малый битригональный додекоикосододекаэдр, икосододекододекаэдр, икосододекоусеченный икосододекаэдор, большой битригональный икосододекаэдр, большой икосоикосододекаэдр, малый икосогемидодекаэдр, малый додекоикосаэдр, малый додекогемидодекаэдр, большой икосододекаэдр, усеченный большой икосаэдр, ромбоикосаэдр, квазиусеченный звездчатый додекаэдр, квазиусеченный додекаэдр, большой додекоикосододекаэдр, малый додекогемиикосаэдр, большой додекоикосаэдр, большой додекогемиикосаэдр, квазиусеченный большой, квазиромбоикосододекаэдр, большой икосогемидодекаэдр, большой додекогемидодекаэдр, большой квазиусеченный икосододекаэдр, большой ромбододекаэдр

3) курносые многогранники: малый курносый икосододекаэдр, курносый додекододекаэдр, курносый икосододекододекаэдр, большой вывернутый курносый икосододекаэдр, вывернутый курносый додекододекаэдр, большой курносый додекоикосододекаэдр, большой курносый икосододекаэдр, большой вывернутый обратнокурносый икосододекаэдр, малый вывернутый обратнокурносый икосоикосододекаэдр

4) не-вихоффский многогранник: большой биромбоикосододекаэдр. [9]

1.2.7 Невыпуклые призмы и антипризмы

Наряду с семейством выпуклых призм и антипризм существует семейство невыпуклых призм и антипризм. Так же, как и их выпуклые аналоги, невыпуклые призмы и антипризмы состоят из равных параллельных оснований, соединенных боковыми сторонами. Но, в отличие от выпуклых призм и антипризм, основаниями представителей рассматриваемого семейства являются невыпуклые многоугольники - например, пятилучевые звезды (пентаграммы).

Кроме подсемейства призм и подсемейства антипризм, рассматриваемое семейство содержит еще одно, третье подсемейство - пересеченных антипризм.

Пересеченная антипризма может быть получена из обычной антипризмы, если повернуть одно основание относительно другого на 180°, а затем сдвинуть основания так, чтобы боковые стороны стали правильными треугольниками. Можно заметить, что такую операцию можно провести не над каждой антипризмой. Например, если попытаться сделать описанные манипуляции с гексаграмматической антипризмой то обнаружится, что для того, чтобы сделать боковые стороны правильными треугольниками, необходимо сблизить основания до их совпадения. Полученный вырожденный (плоский) объект уже нельзя назвать пересеченной антипризмой. Если же попытаться получить пересеченную антипризму из дигептаграмматической антипризмы то выяснится, что при любом расстоянии между основаниями боковые стороны не удастся сделать правильными треугольниками.

Каково же условие, при выполнении которого из антипризмы можно получить пересеченныю антипризму? Оно очень простое: угол при вершине многоугольника, лежащего в основании, должен быть строго меньше 60°.

Угол при вершине основания у гексаграмматической антипризмы равен 60°, у дигептаграмматической антипризмы - примерно 77°, поэтому соответствующие пересеченные антипризмы не существуют. Угол при вершине основания тетраэннеаграмматической антипризмы равен 20°, поэтому тетраэннеаграмматическая пересеченная антипризма существует.

Так как семейство невыпуклых призм и антипризм бесконечно, то, естественно, невозможно показать всех его представителей. Здесь представлены только те невыпуклые призмы и антипризмы, а также пересеченные антипризмы, основания которых имеют не более десяти вершин.

Представители семейства: пентаграмматическая призма, пентаграмматическая антипризма, пентаграмматическая пересеченная антипризма, гексаграмматическая призма, гексаграмматическая антипризма, дигептаграмматическая призма, дигептаграмматическая антипризма, тригептаграмматическая призма, тригептаграмматическая антипризма, тригептаграмматическая пересеченная антипризма, диоктаграмматическая призма, диоктаграмматическая антипризма, триоктаграмматическая призма, триоктаграмматическая антипризма, триоктаграмматическая пересеченная антипризма, диэннеаграмматическая призма, диэннеаграмматическая антипризма, триэннеаграмматическая призма, триэннеаграмматическая антипризма, тетраэннеаграмматическая призма, тетраэннеаграмматическая антипризма, тетраэннеаграмматическая пересеченная антипризма, дидекаграмматическая призма, дидекаграмматическая антипризма, тридекаграмматическая призма, тридекаграмматическая антипризма, тетрадекаграмматическая призма, тетрадекаграмматическая антипризма, тетрадекаграмматическая пересеченная антипризма. [10]

1.3 Многогранники вокруг нас

Многогранники постоянно находятся рядом с нами. Они встречаются в природе, науке, живописи, архитектуре, и во многих других областях.

1.3.1 Многогранники в природе

Правильные многогранники – самые выгодные фигуры, поэтому они широко распространены в природе. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов 0рис.6). Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба. При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми кварцами, монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра. Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана. Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра. В разных химических реакциях применяется сурьменистый сернокислый натрий – вещество, синтезированное учёными. Кристалл сурьменистого сернокислого натрия имеет форму тетраэдра. Последний правильный многогранник – икосаэдр передаёт форму кристаллов бора.

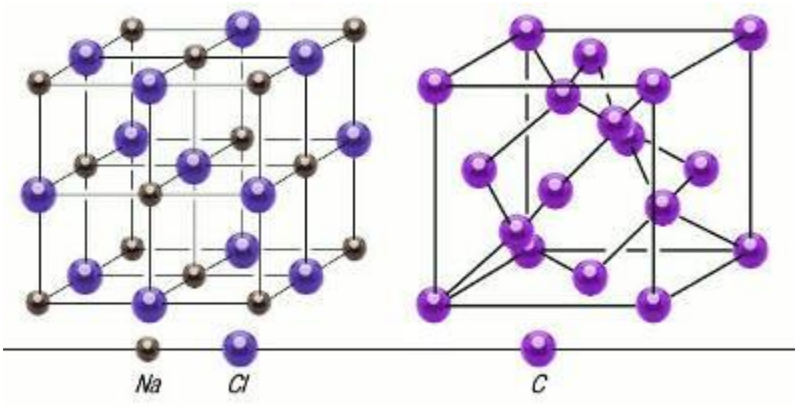


Рис. 6. Кристаллические решетки.

Правильные многогранники встречаются так же и в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феодарии (Circjgjnia icosahtdra) по форме напоминает икосаэдр.

Большинство феодарий живут на морской глубине и служат добычей коралловых рыбок. Но простейшее животное защищает себя двенадцатью иглами, выходящими из 12 вершин скелета. Оно больше похоже на звёздчатый многогранник. Из всех многогранников с тем же числом граней икосаэдр имеет наибольший объём при наименьшей площади поверхности. Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление толщи воды.

Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр. [11]

1.3.2 Многогранники в науке

В XVI веке немецкий астроном Иоганн Кеплер пытался найти связь между пятью известными на тот момент планетами Солнечной системы (исключая Землю) и правильными многогранниками.

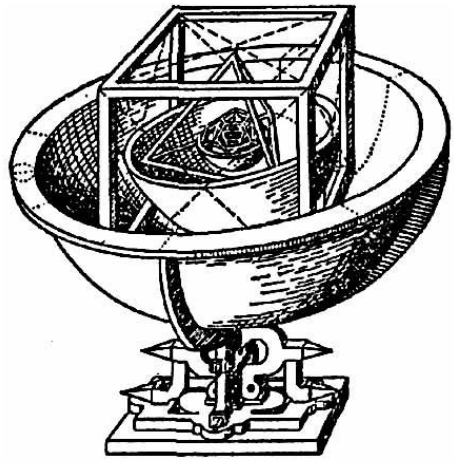


Рис.7. Модель Солнечной системы Кеплера

В книге «Тайна мира», опубликованной в 1596 году, Кеплер изложил свою модель Солнечной системы (рис.7). В ней пять правильных многогранников помещались один в другой и разделялись серией вписанных и описанных сфер. Каждая из шести сфер соответствовала одной из планет (Меркурию, Венере, Земле, Марсу, Юпитеру и Сатурну). Многогранники были расположены в следующем порядке (от внутреннего к внешнему): октаэдр, за ним икосаэдр, додекаэдр, тетраэдр и, наконец, куб. Таким образом, структура Солнечной системы определялись правильными многогранниками. Позже от оригинальной идеи Кеплера пришлось отказаться, но результатом его поисков стало открытие двух законов орбитальной динамики — законов Кеплера, — изменивших курс физики и астрономии, а также правильных звёздчатых многогранников (тел Кеплера — Пуансо).

Идеи Платона и Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира и в наше время нашли своё продолжение в интересной научной гипотезе, которую в начале 80-х гг. высказали московские инженеры В. Макаров и В. Морозов. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обуславливают икосаэдро-додекаэдровую структуру Земли (рис. 8). Она проявляется в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра.

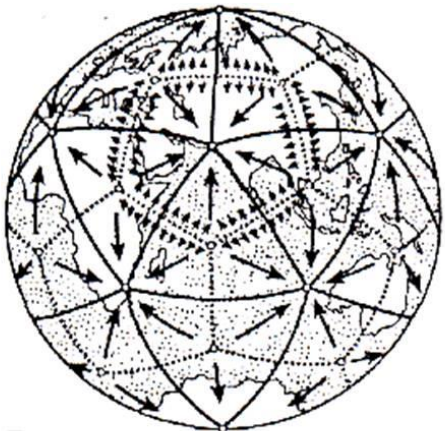


Рис.8. Икосаэдро-додекаэдровая структура Земли

Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдро-додекаэдровой сетки; 62 вершины и середины рёбер многогранников, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления. Здесь располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана. В этих узлах находятся озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник.

Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.[3]

1.3.3 Многогранники в искусстве

Титан Возрождения, живописец, скульптор, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи (1452-1519) — символ неразрывности искусства и науки, а следовательно, закономерен его интерес к таким прекрасным, высокосимметричным объектам, как выпуклые многогранники вообще и усеченный икосаэдр в частности. Леонардо да Винчи изобразил додекаэдр методом жестких ребер и методом сплошных граней (рис.9)

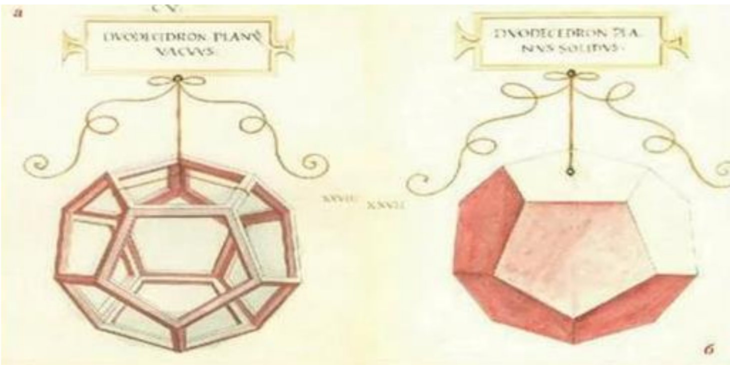


Рис. 9. Изображение Леонардо да Винчи
усеченного икосаэдра методом
жестких ребер в книге Л. Пачоли
«Божественная пропорция».

Правильные геометрические тела - многогранники - имели особое очарование для Эшера. В его многих работах многогранники являются главной фигурой и в еще большем количестве работ они встречаются в качестве вспомогательных элементов. На гравюре "Четыре тела" Эшер изобразил пересечение основных правильных многогранников, расположенных на одной оси симметрии, кроме этого многогранники выглядят полупрозрачными, и сквозь любой из них можно увидеть остальные (рис. 10).

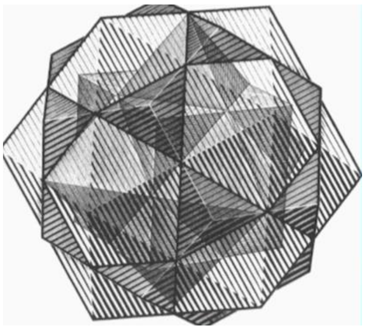


Рис. 10. Гравюра «Четыре тел

Изящный пример звездчатого додекаэдра можно найти в его работе "Порядок и хаос" (рис. 11). В данном случае звездчатый многогранник помещен внутрь стеклянной сферы. Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором.

Рис. 10. Работа «Порядок и хаос»

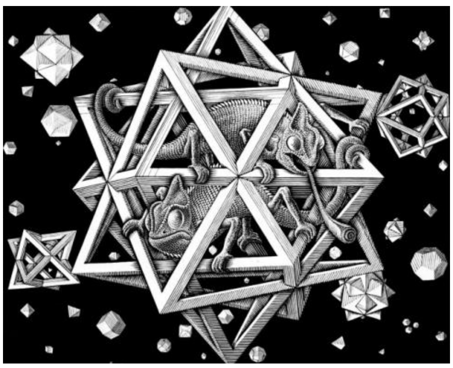


Рис. 11. Гравюра «звезды»

Наиболее интересная работа Эшера - гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров (рис. 11). Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры.

На картине художника Сальвадора Дали «Тайная Вечеря» Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра (рис. 12). Форму додекаэдра, по мнению древних, имела ВСЕЛЕННАЯ , т.е. они считали, что мы живём внутри свода, имеющего форму поверхности правильного додекаэдра. [2]

Рис. 12. Картина «Тайная Вечеря»

1.3.4 Многогранники в архитектуре

Наука и искусство шли с давних времён до настоящего времени рука об руку. Геометрия и архитектура вместе зародились, развивались и совершенствовались. Прямые призмы – самые распространённые многогранники в архитектуре любого города. Это маленькие «хрущёвки», многоэтажные дома, а также массивные небоскрёбы. Характерным примером прямой призмы может стать известная на весь мир шестигранная башня Пирелли, возведённая в Милане в 1960 году (рис. 13). Небоскрёб отличался невиданной для тех времён высотой – 127 метров. И вмещал 32 этажа. Башня была построена по заказу знаменитой компании «Пирелли», производящей автомобильные шины, на том самом месте, где располагался её первый завод. Изящное здание с фасадом из алюминия и стекла стало символом возрождения экономики Италии после войны и получило звание самого элегантного небоскрёба в мире.

Рис. 13. Башня Пирелли

Наклонная призма в Мадриде располагается ещё один не менее примечательный архитектурный объект. Башни «Ворота в Европу» (рис. 14), имеющие форму наклонных призм, собирают вокруг себя не меньше туристов, чем здание Пирелли. Небоскрёбы высотой 114 метров наклоняются друг к другу под углом 15°. Именно этой архитектурной особенности они обязаны своим названием. Американские инженеры и архитекторы Ф. Джонсон и Дж. Берджи сломали стереотипное представление о привычном облике высотных зданий, а башни «Ворота в Европу» стали первыми наклонными железобетонными гигантами в мире и одной из популярнейших достопримечательностей Мадрида.

Рис. 14. Башни «Ворота в Европу»

Приметом правильной пирамиды служит «Дворец мира и согласия» в Астане (рис. 15), столице республики Казахстан. Архитектурное творение из алюминия, стекла и стали создано по принципам «Золотого сечения Фибоначчи». Оно достигает в высоту 61,8 метра и имеет такую же ширину основания. Пирамида известна своими лифтами, которые движутся не вертикально, а по диагонали к вершине строения. Дворец служит местом встречи лидеров мировых религий и считается символом дружбы между различными конфессиями и нациями. Его может посетить любой человек: познакомиться с культурой Казахстана и мира в целом.

Рис. 15. «Дворец мира и согласия)

Архитектурные здания могут принимать форму не только правильных пирамид, но и усечённых. Усечённой является пирамида Кукулькана, сооружённая индейцами майя в древнем городе Чичен-Ица в Мексике. В высоту она достигает 30 метров, а в ширину – 55. Она состоит из 9 квадратных блоков, а на её вершине располагается храм. К нему ведут 4 лестницы: по одной с каждой стороны света. Но существуют и перевёрнутые усеченные пирамиды. Такие многогранники в архитектуре настоящего времени считаются редкостью. В качестве примера можно привести здание словацкого радио (рис. 16). Оно представляет собой перевёрнутую усечённую пирамиду. Строение выглядит эффектно и, несмотря на внешнюю мрачность, привлекает туристов.

Рис.16. Здание словацкого радио

Правильный многогранник Платоновы тела или правильные многогранники в архитектуре в чистом виде встречаются также крайне редко. И это в основном гексаэдры. Так, в Китае построен оригинальный комплекс Cube Tube, основным элементом которого является офисное здание в форме куба (рис. 17). Архитекторы бюро Sako Architects заполнили его фасад невероятным количеством квадратных окон, которые перемежаются террасами. За счёт этого строение выглядит эффектно и кажется невесомым.


Рис. 17. Комплекс Cube Tube

Оригинальный проект горного отеля кубической формы Cuboidal Mountain Hut предложила команда чешских архитекторов Atelier (рис. 18). Огромный гексаэдр согласно ему будет выстроен из дерева, а сверху обшит панелями из алюминия. Солнечные батареи на крыше и стенах, система накопления и очистки дождевой воды, а также электрогенераторы дадут возможность жить в нём независимо от окружающего мира. Куб похож на гигантскую льдину, упавшую с высоких гор. Одна его вершина устремлена в небо, другая словно бы ушла под снег. Если проект будет претворён в жизнь, то станет настоящей сенсацией.


Рис. 18. Отель Cuboidal Mountain Hut

Обратите внимание на Национальную библиотеку Беларуси. Она по праву заслужила статус одного из самых оригинальных строений мира из-за своей формы ромбокубооктаэдра (рис. 19). Это архимедово тело состоит из 18 квадратов и 8 треугольников. Из-за такой формы библиотеку нередко сравнивают с алмазом или бриллиантом. Библиотека имеет 23 этажа и достигает в высоту 75 метров. Помимо огромного книжного фонда и читальных залов, в здании умещаются смотровая площадка, с которой открывается великолепный вид на Минск, комната для детей, а также ресторан.

Рис. 19. Здание Национальной библиотеки Беларуси

Архитекторы-новаторы используют в своих проектах теперь уже невыпуклые геометрические тела. Все их точки лежат по разные стороны от каждой грани, что позволяет достигнуть ошеломляющего эффекта. Типичным примером станет Публичная библиотека Сиэтла (рис. 20). Архитектор Р. Кулхаас постарался сделать здание максимально футуристичным. [12]

Рис. 20. Здание Публичной библиотеки Сиэтла

Глава 2. Практическая часть

2.1. Моделирование многогранников

Практическим этапом моей работы стало изготовление моделей многогранников. Процесс изготовления моделей оказался очень увлекательным. Модели выполнены из разверток, в виде трубогранников и в технике оригами.

2.1.1 Модульное моделирование (оригами)

Сегодня оригами переживает очередную волну интереса. Появились новые направления оригами и области его применения. Так, математики открыли множество возможностей для решения геометрических и топологических задач. Архитекторы и строители увидели в оригамном конструировании возможности для создания многогранных структур из плоского листа. Из бумаги можно построить удивительные конструкции.[13]

Я решила сделать куб в технике оригами, для этого взяла шесть квадратов и, следуя по схеме (рис. 21), сделала куб из модулей (рис. 22).

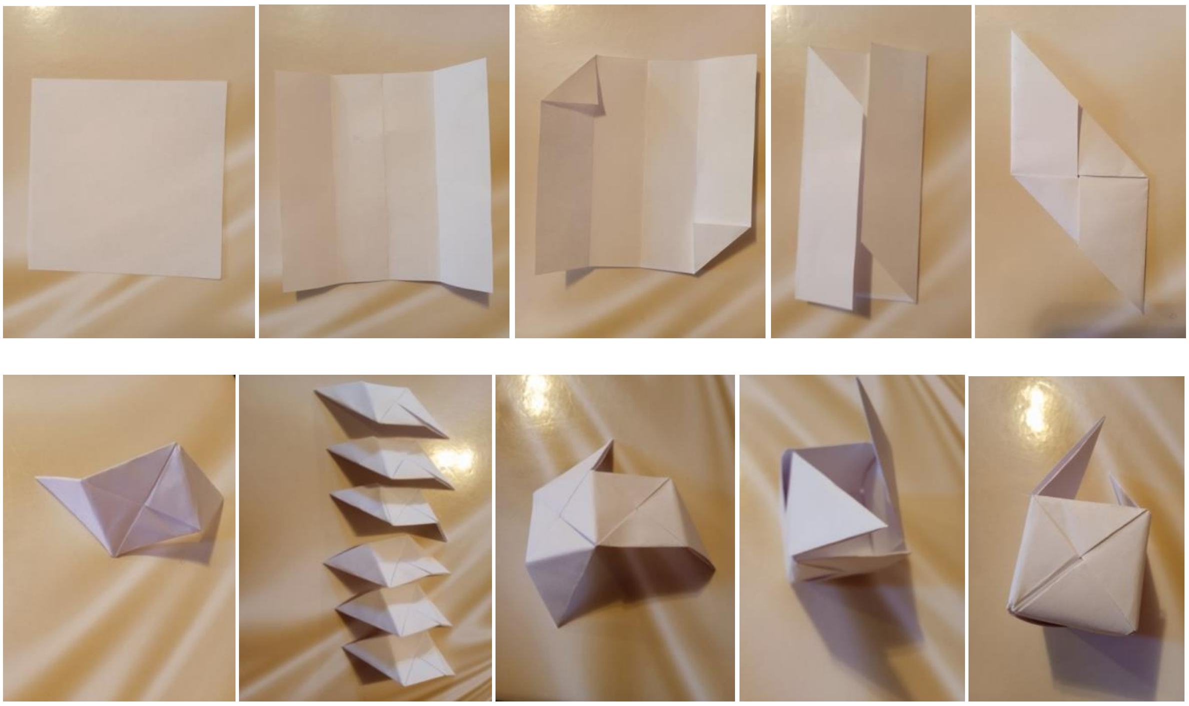


Рис. 21. Схема сбора модулей

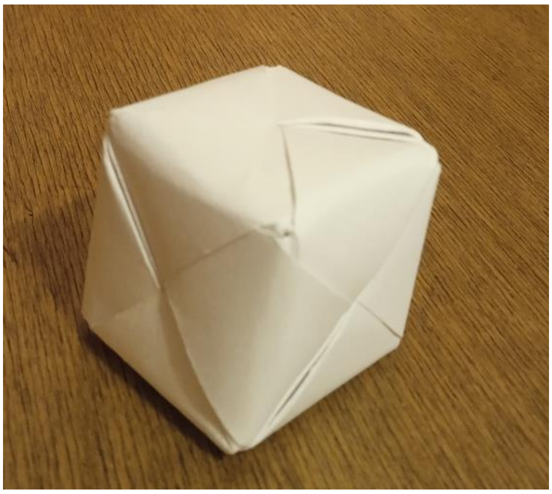


Рис. 22. Модель куба

2.1.2 Моделирование трубогранников

Трубогранники — это каркасные модели многогранников, сделанные из трубочек. Трубочки соединяются между собой ниткой. Процесс создания трубогранников отлично развивает пространственное воображение и мелкую моторику рук. По примеру этих выпуклых многогранников, можно смоделировать множество других многогранников.

В виде трубогранника я решила сделать ромбо-кубо-октаэдр. Трубочки взяты из ватных палочек и разрезаны. Самые длинные из них по 5 см использованы для соединения с центром вершин ромбо-кубо-октаэдра. Другие же по 3,6 см предназначены для соединения вершин. Трубочки были соединены ниткой (рис. 23_

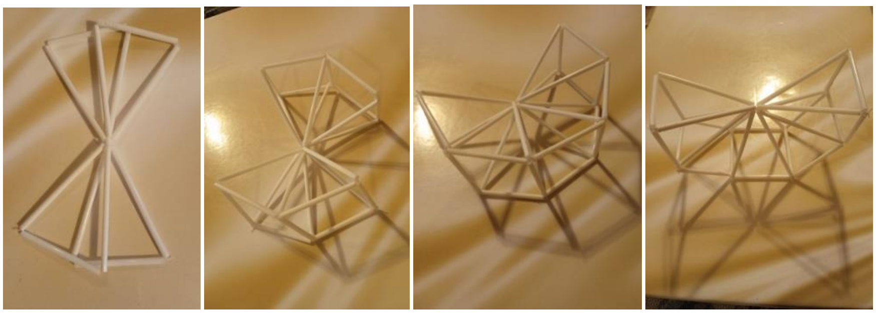
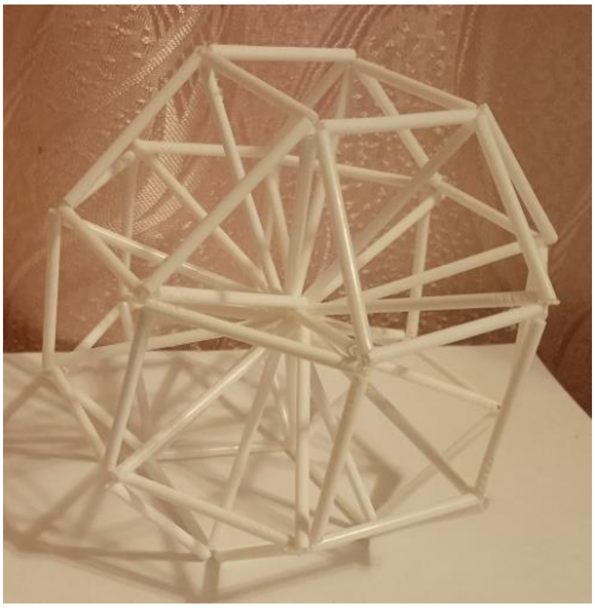


Рис. 23. Схема сбора модулей

Таким образом, ромбо-кубо-октаэдр был сделан, и с помощью такого моделирования можно увидеть, как он устроен (рис. 24).



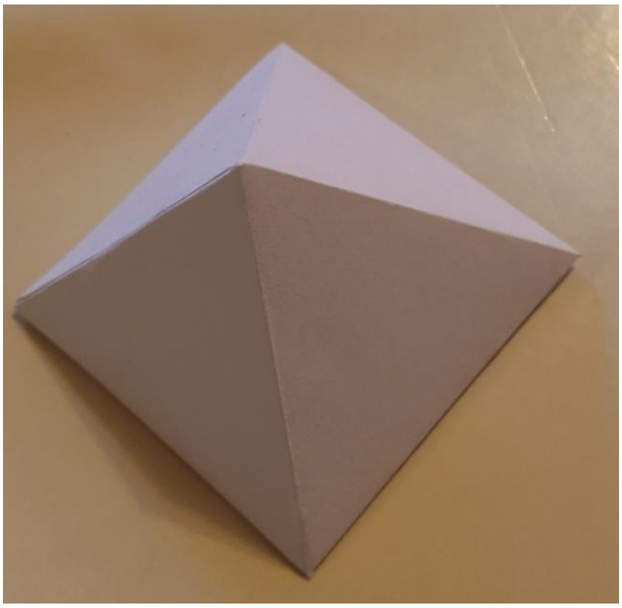


Рис. 22. Модель ромбо-кубо-октаэдра Рис. 24. Пирамида

2.1.3 Моделирование с помощью разверток.

Чаще всего при создании моделей многогранников из плоских разверток используют такие развертки, в которых грани прилегают друг к другу ребрами, а модель строится путем загибания развертки вдоль ребер (рис. 23).

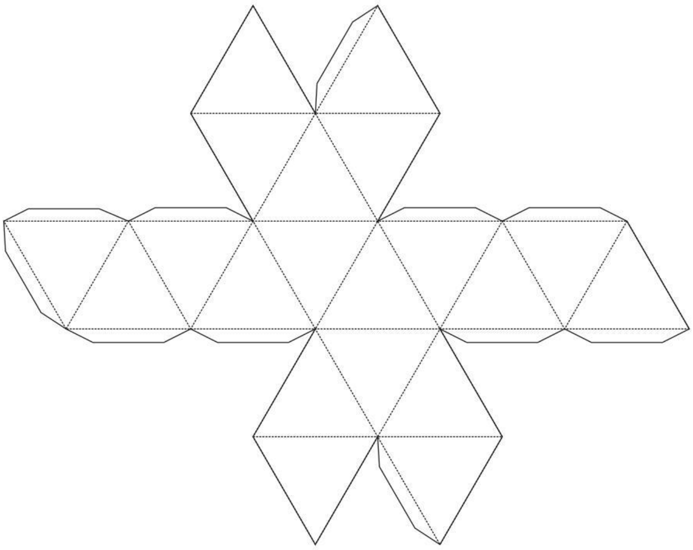


Рис. 23. Развертка

Я сделала пирамиду с ребром одинаковой длины, в основании которой лежит квадрат (рис. 24).

2.2. Детская игровая площадка

Для выполнения модели детской игровой площадки я использовала трубогранники и многогранники, которые были сделаны с помощью развертки (приложение 1).

В результате у меня получилась такая игровая площадка (рис. 25).

Рис. 25. Детская игровая площадка

Заключение

При написании исследовательской работы я изучила дополнительную литературу и расширила свои знания по данному вопросу: узнала, что многогранники имеют красивые формы, они обладают богатой историей, познакомилась с видами многогранников. Также я убедилась, что многогранники – это не просто геометрические тела, они окружают нас в жизни, в природе, в искусстве, архитектуре, науке. Многогранник – это величайшее открытие человечества. Систематизировав полученную информацию, я заметила, что в окружающем мире преобладают правильные многогранники.

Считаю, что полученные в ходе исследования знания и навыки пригодятся мне в будущей жизни. А выполненные мною модели могут быть использованы на уроках математики, биологии, химии и факультативных занятиях как наглядный материал.

Цель моей работы достигнута.

Список использованной литературы и интернет источников

1. Атанасян Л.С и другие. Геометрия 10 - 11.- М.: Просвещение, 2003.
2. Ворошилов А.В. Математика и искусство. - М. просвещение, 1992. – 352
3. Рыбников К.А. История математики: Учебник. - М.: Изд-во МГУ, 1994. – 495
4. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. – М: Аванта плюс, 2002.
5. Энциклопедия для детей. Я познаю мир. Математика. – М: Издательство АСТ, 1999.
6. https://lektsii.org/2-85772.html
7. https://mnogogranniki.ru/articles/191-mnogogranniki-arkhimeda.html
8. http://school37ang.ru/downloads/poly/uniform/nonconvex/kepler-poinsot/..htm
9. http://school37ang.ru/downloads/poly/uniform/nonconvex/semi-regular/..htm
10. http://school37ang.ru/downloads/poly/uniform/nonconvex/prisms/..htm
11. https://www.sites.google.com/site/azz181818/mnogogranniki-v-prirode
12. https://infourok.ru/prezentaciya-po-himii-mnogogranniki-v-kristallah-1911416.html
13. http://edumezen.ru/tinybrowser/files/prezentatcii/2014-murasheva/mnogogranniki-v-naukah.pdf
14. https://fb.ru/article/247962/mnogogranniki-v-arhitekture-arhitekturnyie-formyi-i-stili
15. https://school-science.ru/6/7/38489

Приложение 1.